Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 gennaio 2020
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano orizzontale Π, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una sbarra rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L. L'estremo A della sbarra è vincolato nell'origine del sistema di riferimento, e la sbarra è libera di ruotare senza attrito attorno ad un asse perpendicolare al piano Π e passante per O. Su Π si muove anche un punto materiale P di massa m, che può scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con la retta $x = a$ ($a \geq 0$). L'estremo B della sbarra è collegato al punto P ed al punto H (proiezione ortogonale di B sull'asse y) da due molle di costante elastica $K > 0$ e lunghezza a riposo nulla (si veda la Fig. 1). Si adottino come coordinate lagrangiane l'ordinata y di P e l'angolo θ che la sbarra AB forma con il verso positivo dell'asse x.
1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema (non è richiesto di scrivere le equazioni del moto).
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \geq 0$.
3. Ponendo ora $K = 1$, $M = 3$, $m = 1$, $L = 2$, $a = 2$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia di una sbarra omogenea di massa M e lunghezza L rispetto al suo centro di massa G è $I_{\rm G} = \frac{1}{12}ML^2$. L'energia cinetica del sistema è la somma dell'energia cinetica della sbarra AB e dell'energia cinetica del punto materiale P.

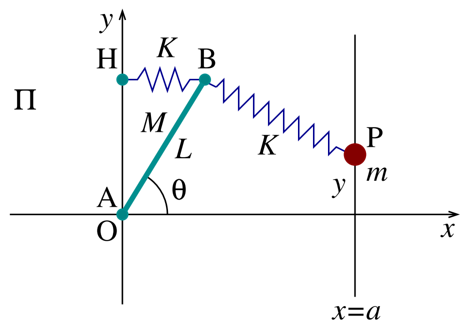

Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Sia data la trasformazione

$$q = \arccos\left(\left(\frac{p}{2Q}\right)^{1/\nu}\right)$$
$$P = -\frac{p^4}{\left(\frac{p}{2Q}\right)^{\alpha/\nu}} + \delta\sqrt{1-\left(\frac{p}{2Q}\right)^{2/\nu}}$$

dalle variabili p, Q alle variabili q, P [si supponga $q \in [0, \frac{\pi}{2})$ e $0 < \left(\frac{p}{2Q}\right)^{1/\nu} \leq 1$].
1. Dire per quali valori dei parametri reali α, δ, ν la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_1(q, Q)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkowski (x_0, x_1, x_2, x_3), con $x^0 = ct$, i due eventi $E_1 = (1, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $E_2 = (-1, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$.
1. Determinare se esiste un riferimento inerziale in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione, oppure se esiste un riferimento inerziale in cui essi sono simultanei.
2. Determinare la trasformazione di Lorentz tra il riferimento (x_0, x_1, x_2, x_3) ed il riferimento inerziale individuato nel punto 1. [Suggerimento: la trasformazione di Lorentz cercata è la composizione di una rotazione $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ ed una trasformazione di Lorentz speciale $(x'_0, x'_1, x'_2, x'_3) \to (x''_0, x''_1, x''_2, x''_3)$].

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 28 gennaio 2020
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Il centro di massa G della sbarra ha coordinate $x_{\rm G} = \frac{1}{2}L\cos\theta$ e $y_{\rm G} = \frac{1}{2}L\sin\theta$. Inoltre, si ha $x_{\rm B} = L\cos\theta$, $y_{\rm B} = L\sin\theta$, $x_{\rm P} = a$ e $y_{\rm P} = y$. Quindi l'energia cinetica del sistema è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{y}_{\rm P}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\,\dot{\theta}^2 + m\,\dot{y}^2\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K|\underline{BP}|^2 + \frac{1}{2}K|\underline{BH}|^2 = \frac{1}{2}K\left[(a - L\cos\theta)^2 + (y - L\sin\theta)^2 + L^2\cos^2\theta\right].$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_y U = K(y - L\sin\theta), \qquad \partial_\theta U = KL(a\sin\theta - y\cos\theta - L\sin\theta\cos\theta).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Dalla prima equazione si ha

$$y = L\sin\theta$$

e sostituendo nella seconda si trova

$$(a - 2L\cos\theta)\sin\theta = 0.$$

Sono quindi possibili quattro posizioni di equilibrio: la prima e la seconda, con $\sin\theta = 0$,

$$\begin{cases} y_{1,2} = 0, \\ \theta_1 = 0,\ \theta_2 = \pi, \end{cases}$$

esistono sempre, la terza e la quarta, con $\sin\theta \neq 0$ (equivalenti per simmetria),

$$\begin{cases} y_{3,4} = L\sin\theta_{3,4}, \\ \cos\theta_{3,4} = \frac{a}{2L}, \end{cases}$$

esistono solo per $0 \leq a \leq 2L$. Conveniamo di indicare con θ_3 l'angolo per cui $\sin\theta_3 \geq 0$ e con θ_4 l'angolo per cui $\sin\theta_4 \leq 0$. Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{yy}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = KL(a\cos\theta + y\sin\theta + L\sin^2\theta - L\cos^2\theta), \quad \partial^2_{y\theta}U = \partial^2_{\theta y}U = -KL\cos\theta.$$

Poiché $\partial^2_{yy}U > 0$, la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia positivo il determinante della matrice Hessiana

$$K^2L(a\cos\theta + y\sin\theta + L\sin^2\theta - L\cos^2\theta) - K^2L^2\cos^2\theta.$$

Si ha quindi che la posizione di equilibrio (y_1, θ_1) è stabile per $a > 2L$, la posizione (y_2, θ_2) è instabile per tutti gli $a \geq 0$, le posizioni (y_3, θ_3) e (y_4, θ_4) sono stabili quando esistono.
3. Per i valori assegnati dei parametri, le posizioni stabili sono (y_3, θ_3) e (y_4, θ_4), con $y_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}L$ e $\cos\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{y}\dot{y}} = m = 1, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{1}{3}ML^2 = 4, \qquad T_{\dot{y}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{y}} = 0.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio è

$$U_{yy} = K = 1, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{1}{4}K(8L^2 - a^2) = 7, \qquad U_{y\theta} = U_{\theta y} = -KL\cos\theta = -1.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà l'equazione biquadratica

$$(1-\omega^2)(7-4\omega^2) - 1 = 4\,\omega^4 - 11\,\omega^2 + 6 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{11 \pm 5}{8}.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{2} \approx 1.41$ e $\omega_- = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.866$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
1. La trasformazione si può riscrivere nella seguente forma:

$$Q = \frac{p}{2(\cos q)^\nu},$$
$$P = \delta \sin q - \frac{p^4}{(\cos q)^\alpha}.$$

2. Imponendo che la parentesi di Poisson $\{Q, P\}_{(q,p)} = 1$ si ottiene:

$$-\frac{2\,p^4\,\nu\,\sin q}{(\cos q)^{\alpha+\nu+1}} - \frac{\delta}{2}(\cos q)^{1-\nu} + \frac{\alpha\,p^4\,\sin q}{2\,(\cos q)^{\alpha+\nu+1}} = 1,$$

da cui si deduce $\nu = 1$, $\delta = -2$, $\alpha = 4$.
3. Si ha $\mathrm{d}F_1 = p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q$, con

$$p = 2\,Q\,\cos q,$$
$$P = -2\,\sin q - 16Q^4.$$

Una primitiva della forma differenziale $\mathrm{d}F_1$ è

$$F_1(q,Q) = 2\,Q\,\sin q + \frac{16}{5}Q^5.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
La separazione tra i due eventi è

$$\underline{E_1E_2} = (\Delta x_0, \Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3) = \left(2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

1. L'intervallo spazio-temporale tra i due eventi è

$$|\underline{E_1E_2}|^2 = 4 - 1 = 3 > 0$$

quindi i due eventi sono a separazione temporale ed esiste un riferimento inerziale in cui essi avvengono nella stessa posizione.
2. Fissiamo l'origine dello spazio-tempo in E_2, di modo che $E_1 = (2, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. La trasformazione di Lorentz cercata è la composizione di una rotazione $(x_0, x_1, x_2, x_3) \to (x_0', x_1', x_2', x_3')$ tale che, nel nuovo riferimento, la componente spaziale di $\underline{E_1E_2}$ sia diretta lungo un asse (ad esempio l'asse x_1') e di una trasformazione di Lorentz speciale $(x_0', x_1', x_2', x_3') \to (x_0'', x_1'', x_2'', x_3'')$ diretta lungo l'asse x_1'. Poiché $x_0 = 2$, $x_1 = 1/2$, $x_2 = \sqrt{3}/2$ e $x_3 = 0$, la rotazione (di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$) sarà attorno all'asse x_3:

$$x_0' = x_0 = 2,$$
$$x_1' = \cos\alpha\, x_1 + \sin\alpha\, x_2 = 1,$$
$$x_2' = -\sin\alpha\, x_1 + \cos\alpha\, x_2 = 0,$$
$$x_3' = x_3 = 0\,.$$

La trasformazione di Lorentz speciale, con velocità v lungo l'asse x'_1, sarà

$$
\begin{aligned}
x''_0 &= \gamma(x'_0 - \frac{v}{c}x'_1) \\
x''_1 &= \gamma(x'_1 - \frac{v}{c}x'_0) \\
x''_2 &= x'_2 \\
x''_3 &= x'_3\,,
\end{aligned}
$$

con $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. I due eventi avvengono nella stessa posizione se

$$x''_1 = \gamma(x'_1 - \frac{v}{c}x'_0) = 0$$

ovvero

$$x'_1 - \frac{v}{c}x'_0 = 1 - \frac{v}{c}2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \frac{c}{2}\,.$$

Tornando al sistema di riferimento di partenza, le componenti della velocità saranno $v_1 = v\cos\alpha = \frac{c}{4}$, $v_2 = v\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}c}{4}$, $v_3 = 0$.