Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 gennaio 2020

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche [6 punti]. Data la trasformazione

$$Q = 3\ln\left(\frac{p}{q^\alpha}\right),$$
$$P = q^\gamma\left(\frac{1}{p} + \beta\, p\right),$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_1(q, Q)$.

2. Trasformazioni di Lorentz [6 punti]. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 di coordinate, nel sistema di riferimento dato,

$$E_1 = (-2, 2, 0, 1) \qquad E_2 = (1, 2, 2, 1)\,.$$

1. Indicare se esiste un riferimento in cui gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, in tal caso, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Determinare la separazione temporale (moltiplicata per c, $c\Delta t'$) tra gli eventi E_1, E_2 nel nuovo sistema di riferimento.

3. Cinematica relativistica [6 punti]. Una stazione orbitante si muove lungo un'orbita circolare con velocità costante $v_1 = \frac{3}{5}c$, completando ogni orbita in un periodo T (tempi e velocità sono riferiti ad un osservatore inerziale posto al centro dell'orbita). Dopo aver sincronizzato il suo orologio con quello a bordo della stazione, un astronauta si allontana con velocità $v_2 = \frac{4}{5}c$ lungo una traiettoria rettilinea tangente all'orbita. Dopo un tempo T, l'astronauta inverte il moto e rientra nella stazione percorrendo a ritroso il medesimo tragitto con velocità $v_2' = \frac{1}{2}v_2 = \frac{2}{5}c$, di modo che al suo rientro la stazione ha percorso esattamente tre orbite. Indicati con τ_1 e τ_2 il tempo trascorso, così come misurato, rispettivamente, dall'orologio a bordo della stazione orbitante e dall'orologio dell'astronauta, si determinino τ_1 e τ_2 in funzione di T. Quale dei due orologi segna il tempo minore?

4. Dinamica relativistica [6 punti]. Una particella relativistica di massa propria m, inizialmente in quiete, viene messa in moto dalla forza $F(t) = \frac{b}{2\sqrt{t}}$ (per $t > 0$) diretta lungo l'asse x, con $b > 0$ costante dimensionale. Si determinino la legge oraria della velocità $v(t)$ e il limite della velocità v_∞ per $t \to \infty$.

5. Urti [6 punti]. Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo M, in quiete, decade in tre particelle identiche di massa m che si muovono su uno stesso piano, lungo tre direzioni formanti angoli di 120°, con velocità uguale in modulo, v. Dopo aver verificato che, nelle condizioni date, la conservazione della quantità di moto è garantita per ogni v, determinare v in funzione del rapporto $\lambda = \frac{m}{M}$. Per quale valore di λ si ha $v = \frac{4}{5}c$?

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 gennaio 2020

Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Trasformazioni canoniche. Per fissare i parametri α, β, γ imponiamo la condizione:

$$[Q,P]_{q,p} = 3\,\frac{q^\alpha}{p}\left(-\alpha\frac{p}{q^{\alpha+1}}\right) q^\gamma\left(-\frac{1}{p^2}+\beta\right) - 3\gamma\frac{q^\alpha}{p}\frac{1}{q^\alpha}\,q^{\gamma-1}\left(\frac{1}{p}+\beta\,p\right) = 1,$$

dalla quale segue che $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{6}$, $\gamma = 1$. La trasformazione canonica si può quindi riscrivere:

$$\begin{aligned} p &= q\,e^{Q/3}, \\ P &= e^{-Q/3} - \frac{1}{6}\,q^2\,e^{Q/3}. \end{aligned}$$

Integrando il differenziale $dF_1(q,Q) = p\,dq - P\,dQ$ si ottiene:

$$F_1(q,Q) = \frac{q^2}{2}\,e^{Q/3} + 3\,e^{-Q/3}.$$

2. Trasformazioni di Lorentz. La separazione tra gli eventi E_1, E_2 è il quadrivettore

$$\underline{E_1E_2} = (3,0,2,0)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale tra gli eventi è la norma

$$|\underline{E_1E_2}|^2 = 9 - 4 = 5$$

quindi la separazione è di tipo tempo, ed esiste un riferimento inerziale in cui gli eventi avvengono nella stessa posizione.

Nel riferimento di partenza $\Delta x = \Delta z = 0$, $\Delta y = 2$, $c\Delta t = 3$, quindi il riferimento cercato è in moto lungo l'asse y rispetto a quello di partenza, e le sue coordinate si ottengono con una trasformazione di Lorentz speciale

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{vy}{c^2}\right) \\ x' &= x \\ y' &= \gamma(y - vt) \\ z' &= z \end{aligned}$$

con $\vec{v} = (0,v,0)$ velocità del nuovo riferimento rispetto al vecchio, e $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$. Nel nuovo riferimento i due eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione, quindi

$$\Delta y' = \gamma(\Delta y - v\Delta t) = 0$$

e

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{2}{3}c\,.$$

Di conseguenza,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{5}}\,.$$

La separazione temporale (moltiplicata per c) nel nuovo sistema di riferimento è

$$c\Delta t' = \gamma\left(c\Delta t - \frac{v}{c}\Delta y\right) = \frac{3}{\sqrt{5}}\left(3 - \frac{2}{3}\,2\right) = \sqrt{5}\,.$$

3. Cinematica Relativistica. Prendiamo come origine dei tempi propri e coordinati l'evento O di partenza dell'astronauta dalla stazione orbitante. Quando è trascorso un tempo coordinato pari a $3T$, l'orologio sulla stazione orbitante segna un tempo

$$\tau_1 = 3T\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{12}{5}T = 2.40\,T.$$

L'astronauta percorre la sua traiettoria di allontanamento a velocità $v_2 = \frac{4}{5}c$ in un intervallo di tempo coordinato pari a T e la traiettoria di rientro in un intervallo di tempo coordinato pari a $2T$ con velocità $v_2' = \frac{2}{5}c$, di modo che al rientro il suo orologio segna un tempo

$$\tau_2 = T\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}} + 2T\sqrt{1-\frac{(v_2')^2}{c^2}} = \frac{3+2\sqrt{21}}{5}T = 2.43\,T.$$

Quindi $\tau_1 < \tau_2$.

4. Dinamica relativistica. Dall'equazione del moto relativistica

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F(t),$$

con condizione iniziale $v(t=0)=0$, si trova

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = I(t),$$

dove $I(t) = \int_0^t F(t')\,\mathrm{d}t' = b\sqrt{t}$ è l'impulso impresso dalla forza in un tempo t. Ricavando v si trova, per $t>0$,

$$v(t) = \frac{I(t)}{\sqrt{m^2c^2+[I(t)]^2}}\,c = \frac{b\sqrt{t}}{\sqrt{m^2c^2+b^2t}}\,c.$$

Allora

$$v_\infty = \lim_{t\to\infty} v(t) = c.$$

5. Urti. Essendo le tre particelle di massa m in moto su uno stesso piano, lungo traiettorie che formano angoli di $120°$, con velocità di modulo v, la conservazione della quantità di moto è soddisfatta automaticamente per ogni v. Dalla conservazione dell'energia si trova

$$M = \frac{3m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \Rightarrow \qquad v = c\sqrt{1-9\lambda^2}$$

con $\lambda \le \frac{1}{3}$. Imponendo che $v = \frac{4}{5}c$ si trova

$$\lambda = \frac{1}{5}.$$