Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica - 27 novembre 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto
Compito A

MECCANICA LAGRANGIANA

In un piano verticale è assegnato un sistema di assi cartesiani Oxz, con z verticale discendente. In tale piano si muove una guida circolare rigida e omogenea, di massa M, centro G e raggio R. Il punto A della guida circolare può scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse w, che forma angoli di 45° con gli assi x e z (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F_1} = -K\,\mathrm{OA}$, $K > 0$. Il punto B della guida circolare, diametralmente opposto ad A, è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -K\,\mathrm{HB}$, dove H è la proiezione di B sull'asse delle x (si veda la Fig. 1). La guida circolare è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz e passante per A. Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ di A lungo l'asse w e l'angolo θ che il diametro AB della guida circolare forma con la direzione verticale discendente (si veda la Fig. 1).

1. Si scriva la lagrangiana $\mathcal{L}$ del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro adimensionale $\frac{KR}{Mg}$.
3. Ponendo ora $M = 2$, $R = 1$, $K = 1$, $g = 8$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della guida circolare rispetto al suo centro di massa è $I_G = MR^2$.

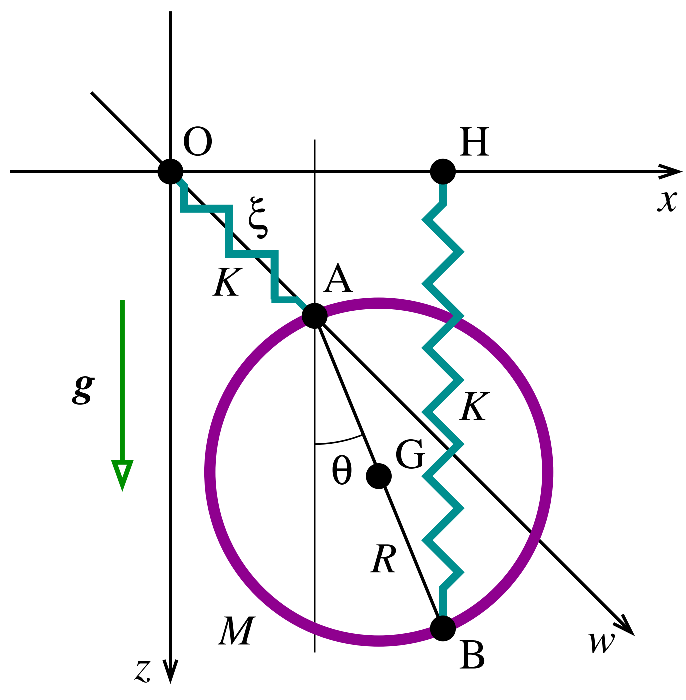

Fig. 1

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

1. Il centro di massa ha coordinate $x_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\xi + 2R\sin\theta)$ e $z_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\xi + 2R\cos\theta)$. Inoltre $z_B = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\xi + 4R\cos\theta)$. La velocità del centro di massa è $\dot{x}_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\dot{\xi} + 2R\cos\theta\,\dot{\theta})$, $\dot{z}_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,\dot{\xi} - 2R\sin\theta\,\dot{\theta})$.
   L'energia cinetica è
   $$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left[\dot{\xi}^2 + 2R^2\dot{\theta}^2 + \sqrt{2}\,R\,(\cos\theta - \sin\theta)\,\dot{\xi}\dot{\theta}\right].$$
   L'energia potenziale è
   $$U = -Mgz_G + \frac{1}{2}K(\xi^2 + z_B^2) = -\frac{1}{2}Mg(\sqrt{2}\,\xi + 2R\cos\theta) + \frac{1}{2}K\left(\frac{3}{2}\xi^2 + 4R^2\cos^2\theta + 2\sqrt{2}\,R\xi\cos\theta\right).$$
   La funzione di Lagrange del sistema è $\mathcal{L} = T - U$.

2. Per determinare le posizioni d'equilibrio si calcolano
   $$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{\sqrt{2}\,Mg}{2} + \frac{3}{2}K\xi + \sqrt{2}\,KR\cos\theta, \qquad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \left(MgR - 4KR^2\cos\theta - \sqrt{2}\,KR\xi\right)\sin\theta$$
   Le posizioni d'equilibrio sono quindi:
   $$1. \qquad \sin\theta_1 = 0 \to \theta_1 = 0, \quad \xi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\left(\frac{Mg}{2KR} - 1\right).$$
   $$2. \qquad \sin\theta_2 = 0 \to \theta_2 = \pi, \quad \xi_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\left(\frac{Mg}{2KR} + 1\right).$$
   $$3. \qquad \cos\theta_3 = \frac{Mg}{8KR} \to \theta_3 = \arccos\left(\frac{Mg}{8KR}\right) \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{2}\,Mg}{4K}.$$
   $$4. \qquad \cos\theta_4 = \frac{Mg}{8KR} \to \theta_4 = -\arccos\left(\frac{Mg}{8KR}\right) \quad \xi_4 = \frac{\sqrt{2}\,Mg}{4K}.$$
   Le ultime due sono equivalenti per simmetria ed esistono solo se $\frac{Mg}{8KR} \le 1$, cioè per $\frac{KR}{Mg} \ge \frac{1}{8}$. Per determinare la stabilità delle posizioni d'equilibrio, si calcolano
   $$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{3}{2}K, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = (MgR - \sqrt{2}\,KR\xi)\cos\theta + 4KR^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta), \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\theta} = -\sqrt{2}\,KR\sin\theta.$$
   Si verifica allora che la posizione 1 è stabile per $\frac{KR}{Mg} < \frac{1}{8}$, la posizione 2 è sempre instabile, le posizioni 3 e 4 sono stabili quando esistono, cioè per $\frac{KR}{Mg} \ge \frac{1}{8}$.

3. Per i valori assegnati dei parametri si ha $\frac{KR}{Mg} = \frac{1}{16} < \frac{1}{8}$, per cui la posizione d'equilibrio stabile è la posizione numero 1. Indicando con un pedice 1 l'espressione calcolata in corrispondenza di (ξ_1, θ_1), si ha
   $$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_1 = \frac{3}{2}, \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right)_1 = \frac{8}{3}, \qquad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\theta\partial\xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\theta}\right)_1 = 0.$$
   e
   $$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\xi}^2}\right)_1 = M = 2, \qquad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\theta}^2}\right)_1 = 2MR^2 = 4, \qquad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\theta}\partial\dot{\xi}}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial\dot{\xi}\partial\dot{\theta}}\right)_1 = \frac{\sqrt{2}\,MR}{2}(\cos\theta - \sin\theta)\Big|_1 = \sqrt{2}.$$
   Le frequenze dei modi normali sono quindi determinate dall'equazione
   $$\left(\frac{3}{2} - 2\omega^2\right)\left(\frac{8}{3} - 4\omega^2\right) - 2\omega^4 = 0,$$
   ovvero $9\omega^4 - 17\omega^2 + 6 = 0$. Le soluzioni sono $\omega_+ = 1.19$ e $\omega_- = 0.685$.