

Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica - 27 novembre 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto
Compito B

MECCANICA LAGRANGIANA

In un piano verticale è assegnato un sistema di assi cartesiani Oxz , con z verticale discendente. In tale piano si muove una guida circolare rigida e omogenea, di massa M , centro G e raggio R . Il punto A della guida circolare può scivolare senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse w , che forma angoli di 45° con gli assi x e z (si veda la Fig. 1), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine, $\underline{F}_1 = -K OA$, $K > 0$. Il punto B della guida circolare, diametralmente opposto ad A , è soggetto ad una forza elastica $\underline{F}_2 = -K PB$, dove P è la proiezione di B sull'asse delle x (si veda la Fig. 1). La guida circolare è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz e passante per A . Si indichi con $g > 0$ il modulo dell'accelerazione di gravità.

Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa ξ di A lungo l'asse w e l'angolo ϕ che il diametro AB della guida circolare forma con la direzione verticale discendente (si veda la Fig. 1).

1. Si scriva la lagrangiana \mathcal{L} del sistema. (Per ragioni di tempo non si chiede di scrivere le equazioni del moto).
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro adimensionale $\frac{KR}{Mg}$.
3. Ponendo ora $M = 8$, $R = 1$, $K = 1$, $g = 2$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della guida circolare rispetto al suo centro di massa è $I_G = MR^2$.

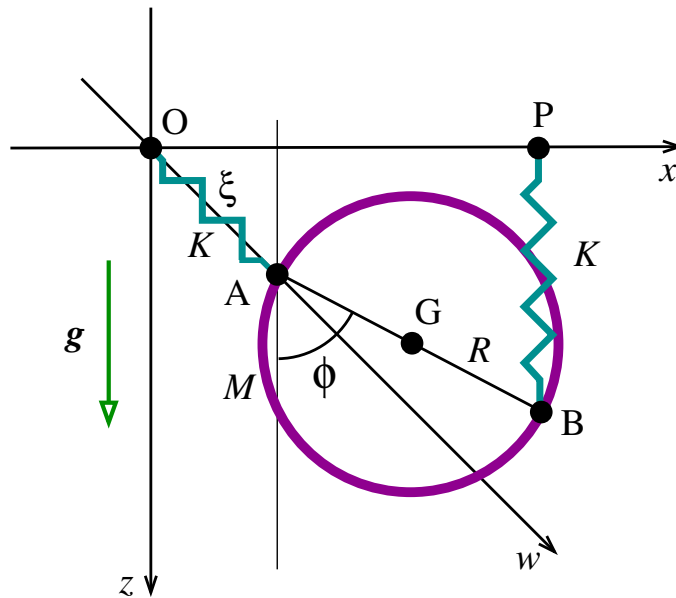


Fig. 1

SOLUZIONE

ESERCIZIO 1

1. Il centro di massa ha coordinate $x_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\xi + 2R \sin \phi)$ e $z_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\xi + 2R \cos \phi)$. Inoltre $z_B = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\xi + 4R \cos \phi)$. La velocità del centro di massa è $\dot{x}_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\dot{\xi} + 2R \cos \phi \dot{\phi})$, $\dot{z}_G = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\dot{\xi} - 2R \sin \phi \dot{\phi})$.

L'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2) + \frac{1}{2}I_G\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}M\left[\dot{\xi}^2 + 2R^2\dot{\phi}^2 + \sqrt{2}R(\cos \phi - \sin \phi)\dot{\xi}\dot{\phi}\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = -Mgz_G + \frac{1}{2}K(\xi^2 + z_B^2) = -\frac{1}{2}Mg(\sqrt{2}\xi + 2R \cos \phi) + \frac{1}{2}K\left(\frac{3}{2}\xi^2 + 4R^2 \cos^2 \phi + 2\sqrt{2}R\xi \cos \phi\right).$$

La funzione di Lagrange del sistema è $\mathcal{L} = T - U$.

2. Per determinare le posizioni d'equilibrio si calcolano

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} = -\frac{\sqrt{2}Mg}{2} + \frac{3}{2}K\xi + \sqrt{2}KR \cos \phi, \quad \frac{\partial U}{\partial \phi} = (MgR - 4KR^2 \cos \phi - \sqrt{2}KR\xi) \sin \phi$$

Le posizioni d'equilibrio sono quindi:

1. $\sin \phi_1 = 0 \rightarrow \phi_1 = 0, \quad \xi_1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\left(\frac{Mg}{2KR} - 1\right).$
2. $\sin \phi_2 = 0 \rightarrow \phi_2 = \pi, \quad \xi_2 = \frac{2\sqrt{2}}{3}R\left(\frac{Mg}{2KR} + 1\right).$
3. $\cos \phi_3 = \frac{Mg}{8KR} \rightarrow \phi_3 = \arccos\left(\frac{Mg}{8KR}\right) \quad \xi_3 = \frac{\sqrt{2}Mg}{4K}.$
4. $\cos \phi_4 = \frac{Mg}{8KR} \rightarrow \phi_4 = -\arccos\left(\frac{Mg}{8KR}\right) \quad \xi_4 = \frac{\sqrt{2}Mg}{4K}.$

Le ultime due sono equivalenti per simmetria ed esistono solo se $\frac{Mg}{8KR} \leq 1$, cioè per $\frac{KR}{Mg} \geq \frac{1}{8}$. Per determinare la stabilità delle posizioni d'equilibrio, si calcolano

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{3}{2}K, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} = (MgR - \sqrt{2}KR\xi) \cos \phi + 4KR^2(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi), \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \phi \partial \xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \phi} = -\sqrt{2}KR \sin \phi.$$

Si verifica allora che la posizione 1 è stabile per $\frac{KR}{Mg} < \frac{1}{8}$, la posizione 2 è sempre instabile, le posizioni 3 e 4 sono stabili quando esistono, cioè per $\frac{KR}{Mg} \geq \frac{1}{8}$.

3. Per i valori assegnati dei parametri si ha $\frac{KR}{Mg} = \frac{1}{16} < \frac{1}{8}$, per cui la posizione d'equilibrio stabile è la posizione numero 1. Indicando con un pedice 1 l'espressione calcolata in corrispondenza di (ξ_1, ϕ_1) , si ha

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}\right)_1 = \frac{3}{2}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}\right)_1 = \frac{8}{3}, \quad \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \phi \partial \xi}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \phi}\right)_1 = 0.$$

e

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\xi}^2}\right)_1 = M = 8, \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\phi}^2}\right)_1 = 2MR^2 = 16, \quad \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{\xi}}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{\xi} \partial \dot{\phi}}\right)_1 = \frac{\sqrt{2}MR}{2}(\cos \phi - \sin \phi) \Big|_1 = 4\sqrt{2}.$$

Le frequenze dei modi normali sono quindi determinate dall'equazione

$$\left(\frac{3}{2} - 8\omega^2\right)\left(\frac{8}{3} - 16\omega^2\right) - 32\omega^4 = 0,$$

ovvero $72\omega^4 - 34\omega^2 + 3 = 0$. Le soluzioni sono $\omega_+ = 0.596$ e $\omega_- = 0.343$.