Prova scritta di Materia Condensata del 17 settembre 2009

Proff. Paolo Calvani e Mario Capizzi

1º Esercizio (atomi a 2 elettroni)

Un gas è composto di atomi a due elettroni che hanno come stato fondamentale il 2^3P_0 della configurazione $(2p)^2$, ma sono stati eccitati con un fascio di elettroni in uno stato X della configurazione $(2p)(3d)$. Si assuma che valgano le regole di Hund e si considerino solo transizioni ad un elettrone.

1. Elencare, in ordine di energia crescente, tutti gli stati possibili in cui possono trovarsi gli atomi del gas.
2. Identificare tra questi X, sapendo che si tratta di un tripletto e che nel processo di eccitazione dallo stato 2^3P_0 a X si sono osservate perdite di energia a: 30122,0 cm^{-1}; 30123,6 cm^{-1}; 30126,0 cm^{-1}.
   Ricavare inoltre la sua costante di spin-orbita A. Si ricorda che lo spostamento di energia dei livelli, dovuto all'interazione spin-orbita, è
   $$\Delta E(J) = [J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)]\,(A/2).$$
3. Dire se il tripletto X può diseccitarsi radiativamente verso lo stato fondamentale 2^3P_0 e perché. In caso affermativo, dire quali transizioni si osservano in emissione in presenza di un campo magnetico H debole e costante, e con quale polarizzazione rispetto alla direzione del campo magnetico.

2° Esercizio (fisica dei solidi)

Le bande di conduzione e di valenza di un semiconduttore intrinseco sono rappresentate dalle equazioni

$$E_C = E_G + Ak^2$$

$$E_V = -B(1+\cos ak) \quad \text{con}$$

$$E_G = 0{,}3\,\text{eV};\, A = 2\cdot 10^{-15}\,\text{eV cm}^2;\, B = 2\,\text{eV};\, a = 3\,\text{Å}$$

Si domanda di calcolare:

1) nella condizione ideale di assenza di scattering, qual è la massima velocità di una quasiparticella nella banda di valenza
2) i valori delle masse efficaci degli elettroni in fondo alla banda di conduzione e delle lacune in cima alla banda di valenza;
3) la conducibilita' a 300 K sapendo che a questa temperatura la mobilità degli elettroni e' μ_e=2500 cm^{2}V^{-1}s^{-1} e delle lacune μ_h=1800 cm^{2}V^{-1}s^{-1}
   Si ricorda che il numero di portatori intrinseci di un dato segno è

$$n_i = 2{,}5\cdot 10^{19}\left(\frac{m_e^*}{m}\right)^{3/4}\left(\frac{m_h^*}{m}\right)^{3/4}\left(\frac{T}{300}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_G}{2k_BT}}\,\text{cm}^{-3}$$

4) il tempo medio di scattering per gli elettroni e per le lacune. La carica dell'elettrone è 1,60x10^{-19} C.

Soluzioni della prova scritta di Materia Condensata del 17 settembre 2009

Proff. Paolo Calvani e Mario Capizzi

1º Esercizio (atomi a 2 elettroni)

1. **4 punti** Trattandosi di elettroni non equivalenti, non ci sono restrizioni negli accoppiamenti. Perciò avremo stati con L=1,2,3 e S=0,1, combinati in tutti i modi possibili. In ordine di energia crescente, in base alle regole di Hund, i termini saranno: 3^3F_2, 3^3F_3, 3^3F_4, 3^3D_1, 3^3D_2, 3^3D_3, 3^3P_0, 3^3P_1, 3^3P_2, 3^1F_3, 3^1D_2, 3^1P_1.

2. **8 punti** Qui la shell è meno che semipiena, quindi A>0 e l'energia minima si ha per J minimo. Dalla formula si ricava lo splitting fra due livelli successivi:

$$\Delta E(J+1)-\Delta E(J) = A(J+1),$$

dove $J+1$ è il momento angolare del livello di *energia maggiore* fra i due considerati. Nel nostro caso, se J è il momento angolare del livello di energia intermedia (e J-1, J+1 quelli degli altri due livelli rispettivamente di più bassa e alta energia nel tripletto), sarà

$$(30126{,}0 - 30123{,}6)\ \mathrm{cm}^{-1} = 2{,}4\ \mathrm{cm}^{-1} = A(J+1)$$

$$(30123{,}6 - 30122{,}0)\ \mathrm{cm}^{-1} = 1{,}6\ \mathrm{cm}^{-1} = AJ$$

da cui

$$2{,}4/1{,}6 = (J+1)/J = 1{,}5 = 3/2 \Rightarrow J=2$$

Pertanto i tre livelli corrisponderanno, in ordine di energia crescente, a $J = 1,2,3$ e, in base alla riposta alla domanda precedente, saranno i livelli del tripletto $3^3D_{1,2,3}$ (alternativamente, basta considerare che, essendo $S=1$, il livello che da' termini con J=1,2,3 non potra' essere che con L=2).
Inoltre $A = 0{,}8\ \mathrm{cm}^{-1}$.

3. **8 punti** Dal tripletto $3^3D_{1,2,3}$ al tripletto fondamentale 2^3P_0 le regole di selezione $\Delta S=0$ e $\Delta L = \pm1$ (trattandosi di transizioni a 1 solo elettrone) sono rispettate. Inoltre deve aversi con $\Delta J = 0,\pm1$, (qui non c'è il caso $J=0 \rightarrow J=0$). Pertanto l'unico stato che può raggiungere il fondamentale 2^3P_0 è 3^3D_1.. Siamo in effetto Zeeman anomalo: lo stato iniziale si splitta in tre livelli di energia corrispondenti ai tre valori possibili (-1,0, +1) della proiezione del momento angolare m_J per J=1.

Per i fotoni polarizzati perpendicolarmente al campo B, varrà la regola di selezione $\Delta m_J = \pm 1$, per cui si osserveranno le transizioni

3^3D_1 ($m_J = +1$) $\rightarrow 2^3P_0$ e 3^3D_1 ($m_J = -1$) $\rightarrow 2^3P_0$.

Per i fotoni polarizzati parallelamente a B si osserverà invece la transizione

3^3D_1 ($m_J = 0$) $\rightarrow 2^3P_0$.

Infatti $m_J = 0 \rightarrow m_J = 0$ è permessa trattandosi di $\Delta J \neq 0$.

2° Esercizio (fisica dei solidi)

1) 2 punti La velocita' di un portatore nel modello semiclassico e' data da

$v = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k}$ per cui la velocita' massima di una lacuna e'

$$v_{\max} = \frac{aB}{\hbar}\sin ak\bigg|_{\max} = \frac{aB}{\hbar} = \frac{3\cdot 10^{-8}\cdot 2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}}{1{,}054\cdot 10^{-27}} = 9{,}108\cdot 10^{7}\ \text{cm s}^{-1}$$

2) 3 punti La massa efficace e' definita come $m^*_{e,h} = \pm\hbar^2\left(\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}\right)^{-1}$ quindi

$$m_e^* = \frac{\hbar^2}{2A} = \frac{\left(1{,}054\cdot 10^{-27}\right)^2}{2\cdot 2\cdot 10^{-15}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}} = 0{,}1736\cdot 10^{-27}\ g$$

$$m_h^* = -\left(-\frac{\hbar^2}{Ba^2}\right) = \frac{\left(1{,}054\cdot 10^{-27}\right)^2}{2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-12}\cdot\left(3\cdot 10^{-8}\right)^2} = 0{,}386\cdot 10^{-27}\ g$$

3) 2,5 punti La conducibilità e' data da

$$\sigma = n_i e\left(\mu_e + \mu_h\right)$$

$$n_i = 2{,}5\cdot 10^{19}\left(\frac{m_e^*}{m}\right)^{3/4}\left(\frac{m_h^*}{m}\right)^{3/4}\left(\frac{T}{300}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_G}{2k_BT}}\text{cm}^{-3} = 1{,}15\cdot 10^{16}\,\text{cm}^{-3}$$

$$\sigma = 1{,}15\cdot 10^{16}\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\cdot\left(2500 + 1800\right) = 7{,}88\ \Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$$

4) 2,5 punti Il tempo medio di scattering è

$$\tau_e = \frac{m^*{}_e \cdot \mu_e}{e} = \frac{0{,}17 \times 10^{-30} \times 0{,}25}{1{,}60 \times 10^{-19}} = 2{,}6 \times 10^{-13}\, s$$

$$\tau_h = \frac{m^*{}_h \cdot \mu_h}{e} = \frac{0{,}39 \times 10^{-30} \times 0{,}18}{1{,}60 \times 10^{-19}} = 4{,}4 \times 10^{-13}\, s$$