Prova scritta di Materia Condensata ed Elettronica dei Dispositivi a Stato Solido dell'8 Luglio 2009

Proff. Paolo Calvani e Mario Capizzi

1º Esercizio – Fisica atomica

L'atomo di Be (Z = 4) può essere trattato in prima approssimazione come un atomo a 2 elettroni nello stato fondamentale $2s^2$ e $Z_{eff} = 2$. L'energia di prima ionizzazione è $E_0 = 75192$ cm^{-1}. In una misura di assorbimento ottico, la riga di frequenza più bassa è un singoletto a 42565 cm^{-1}. Il livello più basso in energia che può essere eccitato per urto con un fascio di elettroni è invece un tripletto di frequenza minima 21979 cm^{-1} e massima 21982 cm^{-1}. Si assuma $Ry = 109730$ cm^{-1}.

1) Si identifichino le transizioni osservate in assorbimento di fotoni e per urto con gli elettroni, spiegando brevemente i motivi dell'assegnazione.
2) Si determinino: la costante A (>0) dell'interazione spin-orbita per il tripletto ricordando che

$$E(J) - E(J-1) = AJ$$

   e la frequenza a cui si osserverebbe il livello in assenza di spin-orbita.
3) Si determini l'integrale coulombiano I dello stato fondamentale e gli integrali I e K (di scambio) per gli stati eccitati, basandosi sui dati riportati sopra.
4) Si dica in quante righe si divide il singoletto ottico in presenza di un campo magnetico debole B = 1000 gauss se si usa luce polarizzata ortogonalmente a B. Si calcoli la separazione tra le righe e il potere risolutivo necessario a distinguerle. Si ricorda che in queste condizioni lo spostamento dei livelli nel campo B è

$$\Delta E = g_J \mu_B B m_J$$

   dove m_J è la componente del momento angolare totale J lungo B, $\mu_B = 9{,}27\text{x}10^{-21}$ erg/gauss $= 4{,}68\text{x}10^{-5}$ cm^{-1}/gauss , e

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

2º Esercizio – Fisica dei solidi

Nel GaAs intrinseco il rapporto fra le masse efficaci di lacune ed elettroni è m_h/m_e =3,85, quello fra i tempi medi fra due collisioni successive per elettroni e lacune e' τ_e/τ_h = 5,5 (a temperatura ambiente).

1. Determinare la conducibilità intrinseca a T=300 K sapendo che a questa temperatura la concentrazione di elettroni è n = 2,1x10^{6} cm^{-3} e la mobilità degli elettroni μ_e=8500 cm^2/Vs. Spiegare perché si è specificato che il rapporto fra i tempi medi fra due collisioni è noto a T ambiente. Si ricorda che per un dato tipo di portatori
$$\sigma = n\mu e; \quad \mu = \frac{e\tau}{m}$$
e che e = 1,6x10^{-19} C
2. Noto il tempo medio fra due collisioni a T=300 K per gli elettroni, τ_e=3,23x10^{-10}s, e la concentrazione degli elettroni a T=500 K, n_i(500)=2,5x10^{12} cm^{-3}, determinare il valore della banda proibita di energia a T=0 e del coefficiente β di variazione di tale banda con la temperatura, sapendo che E_g (T)= E_g(0) - βT
Si ricorda che per un dato tipo di portatori
$$n_i(T) = \sqrt{N_C N_V}\, e^{-\frac{E_g(T)}{2k_B T}}$$
$$N_C N_V = 2\left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} 2\left(\frac{m_h k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$
e che per un elettrone libero $m_0 = 0{,}911\cdot 10^{-27}\, g$
1eV = 11605 K = 8066cm^{-1}; k_B = 1,38x10^{-16} erg/K = 8,62x10^{-5} eV/K; $\hbar$ = 1,054x10^{-34} J s
3. Quale tipo di drogaggio e quale concentrazione di portatori si ottiene a T ambiente sostituendo nel GaAs un atomo di Si ogni 100 di Ga? Il GaAs cristallizza in una struttura fcc, di costante reticolare a=5,65 A, e l'energia di legame della impurezza è di 5 meV.

Soluzioni

Fisica atomica

1) **3 punti**. Lo stato fondamentale (elettroni equivalenti) è lo stato 2^1S_0, a energia $-E_0$ rispetto a quella del Be ionizzato una volta, che viene presa come zero per le energie. I primi stati eccitati (elettroni non equivalenti) sono gli stati $2^3P_{0,1,2}$ e 2^1P_1. Per le regole di selezione, la prima transizione di dipolo permessa è $2^1S_0 \rightarrow 2^1P_1$, che quindi produce il singoletto a 42565 cm^{-1}, mentre il tripletto (dovuto all'urto con elettroni, per il quale non vi sono regole di selezione) è dovuto alla transizione $2^1S_0 \rightarrow 2^3P_{0,1,2}$.
2) **3 punti.** Poiché la perturbazione spin-orbita è

$$\frac{1}{2}A[J(J+1)-L(L+1)-S(S+1)]$$

e $A > 0$, i 3 livelli si trovano a $+A$ (J=2), $-A$ (J=1) e $-2A$ (J=0), con A= 1 cm^{-1}. Il livello imperturbato si troverebbe a 21982-A = 21981 cm^{-1}.
3) **6 punti**. L'energia dello stato fondamentale è

$$E[2^1S] = -E_0 = E[2s,2s] + I[2S] = -Ry\frac{Z_{eff}^{\ 2}}{n^2} + I[2S]$$

Quindi

$$I[2S] = Ry - E_0 = 34538 \text{ cm}^{-1}$$

Inoltre

$$E[2^3P] = E[2s,2s] + I[2S] + 21981 cm^{-1} \qquad \text{e}$$

$$E[2^3P] = E[2s,2s] + I[2P] - K[2P] \qquad \text{da cui}$$

$$I[2P] = I[2S] + 21981 cm^{-1} + K[2P]$$

dove

$$K[2P] = \frac{42565-21981}{2} = 10292$$

Quindi

$$I[2P] = 34538 + 21981 + 10292 = 66811 \ cm^{-1}$$

4) **3 punti**. Nel campo B il livello 2^1P_1 si separa nelle 3 componenti m_J = -1, 0, +1. Per la regola di selezione $\Delta m_J = \pm 1$, avendo lo stato fondamentale m_J = 0, si osserva un doppietto con componenti di arrivo m_J = -1, +1. La loro separazione è

$$\Delta E = g_J \mu_B B(m_J - m'_J) = 1 \cdot 4{,}68 \times 10^{-5} \cdot 1000 \cdot 2 =$$
$$= 9{,}4 \times 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

Il potere risolutivo necessario è quindi

$$\frac{\nu}{\Delta\nu} = \frac{45265}{9{,}4\times10^{-2}} \cong 5\times10^5$$

Fisica dei solidi

1.

Portando tutto in MKQS

$$\sigma = n\mu e$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m} \Rightarrow \mu_h = \mu_e \frac{m_e}{m_h}\frac{\tau_h}{\tau_e} = 8500\cdot 10^{-4}\frac{1}{3{,}85\times 5{,}5} = 0.0401\, m^2/Vs$$

$$\sigma = ne\mu_e + pe\mu_h = ne(\mu_e + \mu_h) = 2{,}1\cdot 10^6\cdot 10^6 \times 1{,}602\cdot 10^{-19}\times(8500+400)\cdot 10^{-4} = 3\cdot 10^{-7}\,\Omega^{-1}m^{-1}$$

Perche' τ dipende dalla temperatura (concentrazione di elettroni e conducibilità sono date a T ambiente).

2.

$$\mu = \frac{e\tau}{m}$$

$$m_e = \frac{e\tau_e}{\mu_e} = \frac{1{,}602\cdot 10^{-19}\times 3{,}23\cdot 10^{-10}}{0.8500} = 6{,}09\cdot 10^{-32}\,Kg = 6{,}7\cdot 10^{-2}\,m_0\,(m_0 = 0{,}911\cdot 10^{-30}\,Kg)$$

$$m_h = 3{,}85 m_e = 0{,}26\, m_0$$

$$n_i(T) = \sqrt{N_C N_V}\, e^{-\frac{E_g(T)}{2k_BT}} = \left[2\left(\frac{m_e k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} 2\left(\frac{m_h k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}\right]^{1/2} e^{-\frac{E_g(0)-\beta T}{2k_BT}} =$$

$$= 2\left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(m_e m_h)^{3/4} e^{-\frac{E_g(0)-\beta T}{2k_BT}} = AT^{3/2} e^{\frac{\beta}{2k_B}} e^{-\frac{E_g(0)}{2k_BT}} = CT^{3/2} e^{-\frac{E_g(0)}{2k_BT}}$$

$$\frac{n_i(500)}{n_i(300)} = \frac{2{,}5\cdot 10^{12}}{2{,}1\cdot 10^6} = \left(\frac{500}{300}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_g(0)}{2k_B}\left(\frac{1}{500}-\frac{1}{300}\right)} = 2{,}15 e^{\frac{E_g(0)}{2k_B 750}}$$

$$\frac{E_g(0)}{1500 k_B} = \ln\left(1{,}19\cdot 10^6 / 2{,}15\right) = 13{,}22$$

$$E_g(0) = 13{,}22\times 1500 = 19836 K = 1{,}709\, eV$$

$$e^{-\frac{\beta}{2k_B}} = 2\left(\frac{k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (m_e m_h)^{3/4} e^{-\frac{E_g(0)}{2k_B T}} \frac{1}{n_i(T)} =$$

$$= 2\left(\frac{8{,}6\cdot 10^{-5}\times 300\times 1{,}6\cdot 10^{-19}}{2\times 3{,}14\times \left(1{,}05\cdot 10^{-34}\right)^2}\right)^{3/2} \left(0{,}26\times 0{,}067\right)^{3/4}\left(0{,}911\cdot 10^{-30}\right)^{3/2} e^{-\frac{1{,}687}{2\times 300/11605}} \frac{1}{2{,}1\cdot 10^{6}\times 10^{6}} =$$

$$= 2\times 1{,}455\cdot 10^{70}\times 0{,}048\times 0{,}87\cdot 10^{-45}\times 6{,}75\cdot 10^{-15}\frac{1}{2{,}1\cdot 10^{12}} = 0{,}39\cdot 10^{-2}$$

$$\beta = -2k\ln\left(0{,}39\cdot 10^{-2}\right) = -2\times 8{,}6\cdot 10^{-5}\times(-5{,}55) = 0{,}95\cdot 10^{-3}\ \text{eV/K}$$

$$E_g(300) = 1{,}709 - 0.95\times 10^{-3}\times 300 = 1{,}424\,eV \quad \text{come risulta per il GaAs}$$

3.

Ogni cella unitaria, di volume $(5{,}65)^3$ Å^3, contiene 4 (=8/8+6/2) atomi di Ga, per cui il drogaggio cercato e' di

$$\frac{4\times 10^{-2}}{(5{,}65\cdot 10^{-8})^3} = 2{,}21\cdot 10^{20}\,cm^{-3}$$

Poiché a T ambiente (~25 meV) tutti i donatori sono ionizzati e la concentrazione dei portatori intrinseci e' di 2,1x10^6 cm^{-3}, la concentrazione degli elettroni sarà pari a quella dei donatori, quella delle lacune pari a n_i^2/n, ovvero pari a 2,3x10^{-8} cm^{-3}.