MATERIA CONDENSATA

Proff. P. Calvani e M. Capizzi

Prova scritta – 10 Settembre 2015

Esercizio 1.

Si consideri una catena lineare di lunghezza L, formata da N atomi uguali, separati da a = 2,5 Å. La massima pulsazione della catena è $\omega_{\max} = 1{,}04 \times 10^{13}$ rad/s.

Ricordando che la relazione di dispersione per la pulsazione della catena è data da

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{4C}{M}}\sin\frac{Ka}{2}$$

si chiede di:

1) calcolare la velocità del suono lungo la catena;
2) trovare la pulsazione di Debye della catena;
3) partendo dalla definizione dell'energia interna U secondo Debye, dimostrare che la capacità termica c della catena, nell'approssimazione per cui $k_B T << \hbar\omega$ per ogni $\omega \neq 0$, è proporzionale alla sua temperatura assoluta. Si tenga presente che

$$\int_0^b \frac{x}{e^x}dx = -e^{-b}(1-b)+1$$

1 u. a. = 1,66 x10^{-24} g; $\hbar$ = 1,05 x10^{-27} erg s

Esercizio 2.

In un semiconduttore drogato con donatori si sono determinate le seguenti densità n di elettroni in funzione della temperatura:

T (K)	900	800	700	600	500
n (10^{13} cm^{-3})	1090	408	118,4	24,1	3,12

Si chiede di:

a) determinare la banda proibita del semiconduttore;

b) trovare la densità dei donatori;

c) fissare un limite superiore all'energia di legame degli elettroni a questi donatori.

$\hbar$= 1,054×10^{-27} erg·s; k_B=1,381×10^{-16} erg/K; $n_i(T) = \sqrt{N_c N_v}\exp\left(\frac{-E_g}{2K_B T}\right)$; $N_c = AT^{3/2}$

Soluzione 1.

1) La pulsazione massima si ha a bordo zona, dove

$$\omega = \sqrt{\frac{4C}{M}} = 1{,}04\times 10^{13}\ \text{rad/s}$$

Per K piccoli,

$$\omega \cong \sqrt{\frac{4C}{M}}\frac{Ka}{2} = \sqrt{\frac{Ca^2}{M}}K$$

e quindi la velocità del suono è

$$v_s = \sqrt{\frac{C}{M}}a = 0.52\times 10^{13}\times 2{,}5\times 10^{-8} = 1{,}30\times 10^{5}\ \text{cm/s}$$

2) Bisogna adattare il modello di Debye al caso unidimensionale. Il numero degli stati da $-K$ a K è

$$N_K = \frac{L}{2\pi}2K$$

dove L è la lunghezza della catena. Perciò la densità degli stati nell'approssimazione di Debye è

$$D(\omega) = \frac{dN_K}{dK}\frac{dK}{d\omega} = \frac{L}{\pi}\frac{1}{v_s}$$

Se N è il numero di atomi della catena,

$$N = \int_o^{\omega_D} D(\omega)d\omega = \frac{L}{\pi v_s}\omega_D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_D = \frac{\pi v_s N}{L} = \frac{\pi v_s}{a} = \frac{\pi\times 1{,}30\times 10^{5}}{2{,}5\times 10^{-8}} = 1{,}63\times 10^{13}\ \text{rad/s}$$

3) L'energia interna della catena secondo Debye è

$$U = \int_0^{\omega_D} D(\omega)\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_BT)-1}d\omega \cong \frac{L}{\pi v_s}\int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/k_BT)}d\omega =$$

$$= \frac{L}{\pi v_s}\frac{1}{\hbar}(k_BT)^2\int_0^{\omega_D}\frac{\hbar\omega/k_BT}{\exp(\hbar\omega/k_BT)}d\left(\frac{\hbar\omega}{k_BT}\right) = \frac{L}{\pi v_s}\frac{1}{\hbar}(k_BT)^2\int_0^{b}\frac{x}{e^x}dx$$

dove $b = \dfrac{\hbar\omega_D}{k_BT} >> 1$. Perciò

$$U = \frac{L}{\pi v_s}\frac{1}{\hbar}(k_BT)^2(-e^{-b}(1-b)+1) \cong \frac{L}{\pi v_s}\frac{1}{\hbar}(k_BT)^2$$

e $c = \dfrac{dU}{dT} = \dfrac{2L}{\pi v_s}\dfrac{1}{\hbar}k_B^2T$ come dovevasi dimostrare.

Soluzione 2.

a) Nel regime cosiddetto intrinseco che si osserva nei semiconduttori drogati per temperatura sufficientemente alta, la densità totale dei portatori è approssimativamente pari a quella dei soli portatori intrinseci. Procediamo pertanto a determinare se, in qualche intervallo di alte temperature, la banda proibita così determinata è costante (come deve nel caso dei portatori intrinseci). A tal fine, non occorre conoscere il valore di A, come sarà immediatamente chiaro:

$$n(T) = \sqrt{N_c N_v}\exp\left(\frac{-E_g}{2k_BT}\right) = \sqrt{A_c A_v}T^{3/2}\exp\left(\frac{-E_g}{2k_BT}\right)$$

$$\frac{n(900)}{n(800)} = \frac{1090}{408}\times\left(\frac{900}{800}\right)^{3/2}\times\exp\left[\frac{-E_g}{2k_B}\times\left(\frac{1}{900}-\frac{1}{800}\right)\right]$$

$$\frac{E_g}{k_B} = 2\ln\left[\left(\frac{800}{900}\right)^{3/2}\times\frac{1090}{408}\right]\times\frac{900\times 800}{900-800} = 2\ln(0{,}838\times 2{,}67)\times 7200 = 11605K = 1\,eV$$

Analogamente

$$\frac{E_g}{k_B} = 2\ln\left[\left(\frac{700}{800}\right)^{3/2}\times\frac{408}{118{,}4}\right]\times\frac{800\times 700}{800-700} = 2\ln(0{,}818\times 3{,}45)\times 5600 = 11.606K = 1\,eV$$

$$\frac{E_g}{k_B} = 2\ln\left[\left(\frac{600}{700}\right)^{3/2}\times\frac{118{,}4}{24{,}1}\right]\times\frac{700\times 600}{700-600} = 2\ln(0{,}793\times 4{,}91)\times 4200 = 11.424K = 0{,}984\,eV$$

$$\frac{E_g}{k_B} = 2\ln\left[\left(\frac{500}{600}\right)^{3/2}\times\frac{24{,}1}{3{,}12}\right]\times\frac{600\times 500}{600-500} = 2\ln(0{,}761\times 7{,}72)\times 3000 = 10.624K = 0{,}915\,eV$$

La banda proibita del semiconduttore è quindi pari a 1 eV.

b) Chiaramente, la concentrazione dei donatori influenza quella totale dei portatori solo a 600 K e 500 K. Cerchiamo di determinare la concentrazione dei donatori, supposti essere completamente ionizzati, come verificheremo anche alla fine, a partire dal valore della concentrazione totale dei portatori alle due temperature più basse e dalla equazione di neutralità in tale ipotesi.

$$n(T) = p(T) + N_d^+ \cong p(T) + N_d$$

$$n^2(T) = n(T)p(T) + n(T)N_d = n_i^2(T) + n(T)N_d$$

$$N_d = \frac{n^2 - n_i^2}{n} = n - \frac{n_i^2}{n}$$

Valutiamo la concentrazione dei portatori intrinseci a 500 K e 600 K, nota la concentrazione dei portatori totali a 900 K, a questa temperatura circa equivalente a quella dei portatori intrinseci,.

$$n_i(T) = \sqrt{N_c N_v}\exp\left(\frac{-E_g}{2k_BT}\right) = \sqrt{A_c A_v}T^{3/2}\exp\left(\frac{-E_g}{2k_BT}\right)$$

$$\frac{n_i(900)}{n_i(600)} = \frac{1{,}09\times10^{16}}{n_i(600)} = \left(\frac{900}{600}\right)^{3/2}\times\exp\left[-\frac{11.605}{2}\times\left(\frac{1}{900}-\frac{1}{600}\right)\right]$$

$$n_i(600) = 1{,}09\times10^{16}\times\left(\frac{600}{900}\right)^{3/2}\times\exp\left[\frac{11.605}{2}\times\left(\frac{1}{900}-\frac{1}{600}\right)\right] = 1{,}09\times10^{16}\times0{,}544\times3{,}98\times10^{-2} =$$
$$= 2.36\times10^{14}\,cm^{-3}$$

e, analogamente,

$$n_i(500) = 1{,}09\times10^{16}\times\left(\frac{500}{900}\right)^{3/2}\times\exp\left[\frac{11.605}{2}\times\left(\frac{1}{900}-\frac{1}{500}\right)\right] = 1{,}09\times10^{16}\times0{,}414\times5{,}75\times10^{-3} =$$
$$= 2{,}60\times10^{13}\,cm^{-3}$$

Di qui segue

$$N_d(600) = n(600) - \frac{n_i^2(600)}{n(600)} = 24{,}1\times10^{13} - \frac{(2{,}36\times10^{14})^2}{2{,}41\times10^{14}} = (24{,}1-23{,}1)\times10^{13} = 1\times10^{13}\,cm^{-3}$$

$$N_d(500) = n(500) - \frac{n_i^2(500)}{n(500)} = 3{,}19\times10^{13} - \frac{(2{,}6\times10^{13})^2}{3{,}19\times10^{13}} = (3{,}12-2{,}12)\times10^{13} = 1\times10^{13}\,cm^{-3}$$

c) La coincidenza del valore di N_d alle due temperature conferma la completa ionizzazione dei donatori, la cui energia di legame dovrà pertanto essere nettamente inferiore a 500 K, ossia a 43 meV.