FISICA DELLA MATERIA CONDENSATA

Proff. P. Calvani e M. Capizzi

Prova di esame – 17 Febbraio 2014

Esercizio 1

Sia dato un metallo monovalente che cristallizza nella struttura cubica semplice, con lato della cella a = 0,16 nm. Con esso viene realizzato un filo elettrico cilindrico di raggio R = 1,0x10^{-3} m, che è attraversato da una corrente I = 2,5 A quando è soggetto a un campo elettrico E.

1. Trovare il campo E applicando il modello di Sommerfeld. Il cammino libero medio degli elettroni, di massa efficace m^* diversa da quella dell'elettrone libero, è λ= 15 nm.

2. a) Scrivere l'espressione della banda di conduzione assumendo il modello tight-binding a primi vicini con una base minima di orbitali s:

$$E(\bar{k}) = E_{0s} - \alpha_s - \sum_{\bar{R}\in p.v.} \gamma_{\bar{R}} e^{-i\bar{k}\cdot\bar{R}} \quad \text{(dove } E_{0s} - \alpha_s = 6{,}6 \text{ eV e } |\gamma_s| = 0{,}6 \text{ eV)}$$

   b) Determinare la posizione del vettore d'onda di Fermi $k_F = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3}$ (dove n è il numero degli elettroni liberi per unità di volume) nella prima ZB e commentarne al meglio il valore.

   c) Determinare il contributo degli elettroni, $c^{el}{}_v$ al calore specifico a T = 5 K assumendo per energia di Fermi quella degli elettroni a k=k_F .

Si ricorda che $c^{el}{}_v(T) = \dfrac{\pi^2}{2}\left(\dfrac{k_B T}{E_F}\right) n k_B$; $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C; $k_B = 1{,}38\times10^{-23}$ J/K; $\hbar = 1{,}05\times10^{-34}$ J $\cdot$ s

Esercizio 2

1) Determinare il valore massimo della mobilita' e la temperatura T_M alla quale la mobilita' assume tale valore in GaAs fortemente drogato n per il quale μ(10K)= 2x10^5 cm^2/Vs e μ(300K)= 1x10^4 cm^2/Vs.
   Si considerino solo lo scattering da impurezze ($\propto T^{3/2}$) e dal reticolo ($\propto T^{-3/2}$) quali fattori determinanti la mobilita'.
2) Quanto vale la mobilita' a 10 K se la concentrazione dei donatori diminuisce di un fattore 10^3? Giustificare il risultato ottenuto. Si fa presente che la mobilita' da impurezze varia con l'inverso della distanza media fra le impurezze stesse.
3) Determinare il valore della mobilita' a 100 K nelle condizioni di cui al punto 1).

Nei calcoli, arrotondare alla terza cifra significativa.

Soluzioni

Esercizio 1

1.

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I}{\pi R^2 \sigma}$$

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*} = \frac{ne^2\lambda}{m^* v_F} = \frac{ne^2\lambda}{m^*(\hbar k_F / m^*)}$$

con $k_F = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3}$

Quindi la conducibilità si può ottenere senza conoscere la massa efficace:

$$\sigma = \frac{n^{2/3}e^2\lambda}{\hbar\left(3\pi^2\right)^{1/3}} = \frac{e^2\lambda}{a^2\hbar\left(3\pi^2\right)^{1/3}} = \frac{(1{,}6\times10^{-19})^2\times1{,}5\times10^{-8}}{(0{,}16\times10^{-9})^2\times1{,}05\times10^{-34}\times3{,}1} = 4{,}6\times10^7\ (\Omega\mathrm{m})^{-1}$$

e di qui il campo E:

$$E = \frac{I}{\pi R^2\sigma} = \frac{2{,}5}{\pi\times(1{,}0\times10^{-3})^2\times4{,}6\times10^7} = 0{,}017\ \mathrm{V/m}$$

2 a)

$$E_s(\bar{k}) = E_{0s} - \alpha_s - 2\left|\gamma_s\right|\left(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a\right) = 6.6 - 1.2\left(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a\right)\mathrm{eV}$$

b)

$$k_F = \left(3\pi^2 n\right)^{1/3} = \left(3\pi^2\frac{1}{a^3}\right)^{1/3} = \frac{3{,}1}{a} \cong \frac{\pi}{a}$$

Quindi, nell'approssimazione di elettrone libero, k_F si troverebbe a bordo zona. Ciò è dovuto al fatto che in tre dimensioni il volume di una sfera di raggio π/a, che tocca il bordo della I ZB, è pari a circa $4(\pi/a)^3$, ossia la metà del volume $(2\pi/a)^3$ della I ZB, come ci si aspetta per un metallo monovalente con banda semipiena.

c) Perciò,

$$E_s(k_F) = E_{0s} - \alpha_s - 6\gamma_s \cos k_F a = E_{0s} - \alpha_s - 6\gamma_s \cos\left(3\pi^2\frac{1}{a^3}\right)^{1/3} a =$$
$$6{,}6 - 3{,}6\cos\left(3\pi^2\right)^{1/3} \cong 6{,}6 - 3{,}6\cos\pi \cong 10{,}2\ \mathrm{eV} = 16{,}32\times10^{-19}\ \mathrm{J}$$

Di qui,

$$c^{el}{}_v(T) = \frac{\pi^2}{2}\left(\frac{k_B^2 T}{E_F}\right)\frac{1}{a^3} = \frac{\pi^2\times\left(1{,}38\times10^{-23}\right)^2\times5}{2\times16{,}32\times10^{-19}\times\left(0{,}16\times10^{-9}\right)^3} = 509\ \mathrm{J/(Km^3)}$$

Esercizio 2

1)

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{A' T^{3/2}} + \frac{1}{B' T^{-3/2}} = A T^{-3/2} + B T^{3/2}$$

La mobilita' ha chiaramente un massimo, il suo inverso un minimo

$$\frac{\partial(1/\mu)}{\partial T} = -\frac{3}{2} A T^{-5/2} + \frac{3}{2} B T^{1/2}$$

$$\frac{\partial(1/\mu)}{\partial T} = 0 = -\frac{3}{2} A T_M^{-5/2} + \frac{5}{2} B T_M^{1/2}$$

$$T_M = \left(\frac{A}{B}\right) = C^{1/3}$$

$$\frac{2\times10^5}{1\times10^4} = 20 = \frac{A300^{-3/2} + B300^{3/2}}{A10^{-3/2} + B10^{3/2}} = \frac{C300^{-3/2} + 300^{3/2}}{C10^{-3/2} + 10^{3/2}}$$

$$C300^{-3/2} + 300^{3/2} = 20\left(C10^{-3/2} + 10^{3/2}\right)$$

$$C = \frac{20\times10^{3/2} - 300^{3/2}}{300^{-3/2} - 20\times10^{-3/2}} = \frac{632 - 5196}{1{,}9\times10^{-4} - 0{,}632} = \frac{-4564}{-0{,}632} = 7216$$

$$T_M = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/3} = C^{1/3} = 19.3$$

$$\frac{1}{\mu(300)} = 10^{-4} = A T^{-3/2} + B T^{3/2} = 7216B\times300^{-3/2} + B\times300^{3/2} = 1.39B + 5196B$$

$$B = 1{,}92\times10^{-8}$$

$$A = 1{,}39\times10^{-4}$$

$$\mu(19{,}3) = \left(A T^{-3/2} + B T^{3/2}\right)^{-1} = \left(1{,}39\times10^{-4}\times1{,}18\times10^{-2} + 1{,}92\times10^{-8}\times84{,}8\right)^{-1} = \left(1{,}64\times10^{-6} + 1{,}63\times10^{-6}\right)^{-1} =$$

$$= 3{,}06\times10^{5}\ \mathrm{Vcm^{-2}s^{-1}}$$

Come era logico aspettarsi, i due contributi alla mobilita' si uguagliano ove questa ha un massimo.

2) A 10 K la mobilita' e' determinata dallo scattering da impurezze, la cui distanza media aumenta di un fattore 10 per una diminuzione della concentrazione di impurezze di un fattore mille. Il coefficiente A, che dipende dall'inverso di tale distanza media, aumentera' quindi di un fattore 10 e cosi' la mobilita' a 10 K, che sara' pari a 2x10^6 cm^2/Vs.

3)

$$\mu(100)=\left(AT^{-3/2}+BT^{3/2}\right)^{-1}=\left(1{,}39\times10^{-4}\times10^{-3}+1{,}92\times10^{-8}\times10^{3}\right)^{-1}=\left(1{,}39\times10^{-7}+1{,}92\times10^{-5}\right)^{-1}=$$

$$=5{,}2\times10^{4}\,\mathrm{Vcm^{-2}s^{-1}}$$