MATERIA CONDENSATA

Proff. P. Calvani e M. Capizzi

II prova di esonero - 22 Gennaio 2013

Esercizio 1.

Un semiconduttore ha una costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 10$ ed una densità degli stati in banda di conduzione $N_c = 1{,}8 \times 10^{22}$ m^{-3}, che si può assumere indipendente da *T*. Le masse efficaci di elettroni e lacune si assumono uguali.
Il semiconduttore è drogato con una densità di donori $N_D = 0{,}02 N_M$ dove N_M è la densità critica per la transizione di Mott.
1. Sapendo che l'energia di ionizzazione dei donori $\varepsilon_d = 13{,}6 m^* / \varepsilon_r^2$ eV vale 11 meV e ricordando che il raggio dell'orbita nello stato fondamentale è $r_d = a_0 \varepsilon_r / m^*$ ($a_0 = 0{,}54 \times 10^{-10}$ m; m*= massa efficace degli elettroni *in unità di masse elettroniche*), calcolare la densità degli elettroni liberi a 30 K.
2. Trovare la conducibilità elettrica del conduttore a 30 K sapendo che, al presente drogaggio, il tempo medio di scattering è direttamente proporzionale alla radice quadrata del calore specifico reticolare e vale $5{,}0 \times 10^{-12}$ s a 5 K.
3. Supponendo ora di incrementare il numero dei donori fino a $N_D = 2N_M$, calcolare l'ordine di grandezza del contributo alla capacità termica degli elettroni di conduzione a 5 K in termini dell'energia di Fermi, che per *N* elettroni di massa *m* è data da

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Nella risposta ad ogni domanda, giustificare le formule utilizzate e le approssimazioni fatte.

$m_e = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C; k_B = 1,38x10^{-23} J/K; $\hbar =$ 1,05x10^{-34} J s

Esercizio 2.

Un solido di densità $\rho = 5{,}8$ g/cm^3 ha un reticolo cubico semplice di lato a. La base è costituita da uno ione positivo di massa M_1 = 5 u.m.a. e uno ione negativo di massa M_2 = 14 u.m.a., che si alternano a distanza a/2 l'uno dall'altro lungo i lati del cubo (1 u.m.a. = 1.66x10^{-24} g.). In prossimità del centro zona la branca acustica è approssimata da

$$\omega(k) = ak\sqrt{\frac{C}{2(M_1 + M_2)}}$$

Inoltre una misura della velocità del suono fornisce $v_s = 4{,}8 \times 10^5$ cm/s.
1. Trovare la frequenza, in cm^{-1}, alla quale il solido assorbe la radiazione infrarossa.
2. Calcolare la capacità termica del solido per unità di massa a 30 K, ricordando che la capacità termica è, nel modello di Debye,

$$C_v = \frac{4\pi^4}{5} N k_B (T/T_D)^3$$

per ogni branca fononica, dove *N* è il numero totale di atomi del solido e T_D è la temperatura di Debye, e che la densità degli stati fononici è data da

$$D(\omega) = \frac{V\omega^2}{2\pi^2 v_s^{\,3}}$$ dove *V* è il volume del solido.

u.m.a. = 1.66x10^{-24} g; k_B=1.38x10^{-16} erg K^{-1}

Soluzioni

Esercizio 1

1. Si trova subito che

$$m^* = \frac{\varepsilon_d \varepsilon_r^2}{13{,}6} = \frac{0{,}011 \times 100}{13{,}6} = 0{,}081$$

$$r_d = \frac{a_0 \varepsilon_r}{m^*} = \frac{10 \times 0{,}54 \times 10^{-10}}{0{,}081} = 6{,}7 \times 10^{-9} \text{ m}$$

Poiché la densità critica per la transizione di Mott è

$$N_M = \left(\frac{4}{3}\pi r_d^3\right)^{-1} = \frac{3}{4\pi(6{,}7 \times 10^{-9})^3} = 8{,}0 \times 10^{23} \text{ m}^{-3}$$

$$\mathrm{N_D} = 1{,}6 \times 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

Il semiconduttore è fortemente drogato e a 30 K si possono trascurare gli elettroni intrinseci rispetto agli estrinseci. La densità di questi ultimi è

$$n_e = \sqrt{N_c N_D}\exp(-\varepsilon_d / 2k_B T) = \sqrt{1{,}8 \times 10^{22} \times 1{,}6 \times 10^{22}}\exp(-0{,}011 \times 11600 / 2 \times 30) =$$

$$= 1{,}7 \times 10^{22} \times 0{,}12 = 2{,}0 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

2. Il calore specifico reticolare a bassa T è proporzionale a T^3. Quindi

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{ne^2\boldsymbol{\tau}}{m^* m_e} = \frac{2{,}0 \times 10^{21} \times \left(1{,}6 \times 10^{-19}\right)^2 \times 5{,}0 \times 10^{-12} \times 6^{3/2}}{0{,}081 \times 9{,}1 \times 10^{-31}} = 5.1 \times 10^4\ \boldsymbol{\Omega}^{-1}\text{m}^{-1}$$

3. A $N_\mathrm{D} = 2N_M = 1{,}6 \times 10^{24}$ m^{-3} il semiconduttore può essere trattato a tutti gli effetti come un metallo. Il numero di portatori è uguale a N_D e l'ordine di grandezza della capacità termica degli elettroni è

$$C \approx \frac{k_B T}{E_F}$$

L'energia di Fermi dista dal fondo della banda di conduzione

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m^*}\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\left(1.05 \times 10^{-34}\right)^2}{2 \times 0{,}081 \times 9{,}1 \times 10^{-31}}\left(3\pi^2 1{,}6 \times 10^{24}\right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}75 \times 10^{-37} \times 13 \times 10^{16} = 9{,}8 \times 10^{-21} \text{ J}$$

Perciò

$$C \approx \frac{k_B T}{E_F} \approx \frac{1{,}38 \times 10^{-23} \times 5}{9{,}8 \times 10^{-21}} \approx 0{,}007$$

Esercizio 2

1. La frequenza infrarossa è quella del fonone ottico a centro zona:

$$\omega_0 = \sqrt{2C\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)}$$

Una volta trovato

$$a = \sqrt[3]{\frac{(M_1 + M_2)}{\rho}} = \sqrt[3]{\frac{19 \times 1{,}66 \times 10^{-24}}{5{,}8}} = 1{,}75 \times 10^{-8} \text{ cm}$$

la costante elastica C si ricava dalla velocità del suono a centro zona, derivando $\omega(k)$:

$$v_s = a\sqrt{\frac{C}{2(M_1 + M_2)}}$$

$$C = 2(M_1 + M_2)\left(\frac{v_s}{a}\right)^2 = 2 \times 19 \times 1{,}66 \times 10^{-24} \times \left(\frac{4{,}8 \times 10^5}{1{,}75 \times 10^{-8}}\right)^2 = 4{,}7 \times 10^4 \text{ dyne/cm}$$

e quindi

$$\omega_0 = \sqrt{2C\left(\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}\right)} = \sqrt{\frac{2 \times 4{,}7 \times 10^4 \times 19}{5 \times 14 \times 1{,}66 \times 10^{-24}}} = 1{,}24 \times 10^{14} \text{ rad/s}$$

$$\tilde{v}_0 = \frac{\omega_0}{2\pi c} = \frac{1{,}24 \times 10^{14}}{2\pi \times 2{,}99 \times 10^{10}} = 658 \text{ cm}^{-1}$$

2. La temperatura di Debye si ricava da ω_D che è definita da

$$\int_0^{\omega_D} \frac{V\omega^2}{2\pi^2 v_s^3}\, d\omega = N \Rightarrow \omega_D = v_s \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N}{V}}$$

$$T_D = \frac{\hbar\omega_D}{k_B} = \frac{\hbar}{k_B} v_s \sqrt[3]{\frac{6\pi^2 N}{V}} = \frac{1{,}05 \times 10^{-27} \times 4{,}8 \times 10^5}{1{,}38 \times 10^{-16} \times 1{,}75 \times 10^{-8}} \sqrt[3]{6\pi^2 \times 2} = 1020 \text{ K}$$

e quindi la capacità termica per unità di massa è

$$C_v = \frac{12\pi^4}{5} \frac{N}{M_{solido}} k_B (T/T_D)^3 = \frac{12\pi^4}{5} 2 \frac{V}{a^3} \frac{1}{\rho V} k_B (T/T_D)^3\ \frac{12\pi^4 \times 2 \times 1{,}38 \times 10^{-16}}{5 \times 19 \times 1{,}66 \times 10^{-24}} \left(\frac{30}{1020}\right)^3 = 5{,}20 \times 10^4 \text{ erg/K} \cdot \text{g}$$