<u>FISICA DELLA MATERIA CONDENSATA</u>

Proff. P. Calvani e M. Capizzi

II prova di esonero - 23 gennaio 2014

<u>Esercizio 1</u>

Un reticolo bidimensionale quadrato di periodo pari ad a = 0,12 nm è fatto di ioni Li^+ e F^- - aventi masse rispettive 7 u. m. a. e 19 u. m. a.. Gli ioni si alternano, equispaziati, lungo le diagonali delle celle quadrate, in modo da formare catene biatomiche. La velocità del suono è v_s = 2400 m/s.

1. Dire quante branche fononiche si possono tracciare nella prima zona di Brilluoin identificandole con i loro nomi e disegnando uno schizzo delle corrispondenti curve di dispersione $\omega(K)$.

2. Il reticolo viene investito da radiazione infrarossa con vettore d'onda ortogonale al piano del reticolo. Determinare, in Hz, la frequenza del picco di assorbimento osservato.

3. Determinare la frequenza di Debye del reticolo, assumendo che il campione sia un quadrato di lato L.

1 u.m.a. = 1.66×10^{-27} kg.

N. B. Si ricorda che, per una catena biatomica lineare di passo a', la frequenza vibrazionale ottica a $\vec{K}$=0 è $\omega_{ott}^0 = \sqrt{2C\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)}$, mentre la frequenza acustica intorno a $\vec{K}$=0 vale $\omega_{ac} \cong \sqrt{\frac{C}{2(M_1+M_2)}}Ka'$.

Si ricorda che vale la condizione $\int_0^{\omega_D} D(\omega)d\omega = N$ dove $D(\omega)$ è la densità degli stati fononici in 2 dimensoni e N è il numero totale di atomi del campione.

<u>Esercizio 2</u>

In un semiconduttore drogato n, la costante di Hall a bassa temperatura segue l'andamento

$$R_H \cong -AT^{-3/4}\exp(\Delta/T)$$

dove A è una costante positiva. Tra 5 e 20 K, R_H diminuisce in modulo di 10^6 volte; inoltre, a 20 K $R_H = -1{,}2\ \mathrm{m}^3C^{-1}$.

1. Determinare il livello energetico dei donori ε_d spiegando le approssimazioni utilizzate.
2. Sapendo che la densità degli stati in banda di conduzione a 20 K vale $N_C = 2{,}8 \times 10^{22}$ m^{-3}, trovare la densità dei donori N_d.
3. Trattando gli elettroni forniti dai donori alla banda di conduzione come un gas di elettroni liberi, dire quale dipendenza dalla temperatura ci si può aspettare, a bassa temperatura, per il loro contributo al calore specifico a volume costante.

$e = 1{,}60\text{x}10^{-19}$ C; $k_B = 1{,}38\text{x}10^{-23}$ J/K

Soluzioni

Esercizio 1

1. Con due atomi per cella in due dimensioni, nella prima ZB si avranno due branche acustiche (LA e TA) e due branche ottiche (LO e TO). Sono degeneri a coppie per la simmetria del reticolo.

2. La radiazione infrarossa che incide normalmente al reticolo dà luogo a un picco di assorbimento corrispondente al modo trasverso ottico a K = 0. La sua frequenza ω_1 si ricava dopo aver determinato la costante elastica dalla velocità del suono lungo le catene diagonali

$$v_s = \left.\frac{d\omega_{ac}}{dK}\right|_{K=0} \cong \sqrt{\frac{C}{2(M_1+M_2)}}\cdot a\sqrt{2} \Rightarrow C = 2(M_1+M_2)\frac{v_s^2}{2a^2} =$$

$$= 26\times 1{,}66\times 10^{-27}\times\left(\frac{2{,}4\times 10^3}{0{,}12\times 10^{-9}}\right)^2 = 17{,}2 \text{ N/m}$$

Sostituendo nell'espressione della frequenza ottica a K=0,

$$\omega_{ott}^0 = \sqrt{2C\left(\frac{M_1+M_2}{M_1M_2}\right)} = \sqrt{2\times 17{,}2\left(\frac{26}{133\times 1{,}66\times 10^{-27}}\right)} = 6{,}4\times 10^{13} \text{ rad/s} \;=\; 10{,}1 \text{ THz}$$

3. La frequenza di Debye si ricava dalla condizione

$$\int_0^{\omega_D} D(\omega)d\omega = N$$

dove N (= 2 x numero delle celle) è il numero di atomi nel reticolo. In 2 dimensioni, se L è il lato del campione, e $N(K)$ il numero di stati in un cerchio di raggio K,

$$D(\omega) = \frac{\partial N(K)}{\partial K}\frac{dK}{d\omega} = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \pi K^2\frac{1}{v_s} = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 2\pi\omega\frac{1}{v_s^2}$$

Sostituendo,

$$\frac{L}{2\pi}^2\frac{1}{v_s^2}\int_0^{\omega_D}\omega d\omega = N \Rightarrow \frac{1}{2\pi v_s^2}\frac{1}{2}\omega_D^2 = \frac{2}{a^2} \Rightarrow$$

$$\omega_D = \sqrt{2\pi}\frac{2v_s}{a} = \sqrt{2\pi}\frac{2\times 2{,}4\times 10^3}{0{,}12\times 10^{-9}} = 1{,}00\times 10^{14} \text{ rad/s} = 16{,}0 \text{ THz}$$

Esercizio 2

1. L'andamento della costante di Hall mostra che a bassa T si può trascurare il contributo delle lacune intrinseche. Se n è la densità di elettroni,

$$R_H(T) = -\frac{1}{n(T)e}$$

Confrontando questa espressione con quella nel testo si vede che $n(T) \cong \frac{1}{eA} T^{3/4} \exp(-\Delta/T)$

e che dunque $\frac{T^{3/4}}{eA} = \sqrt{N_C N_D}$; $\Delta = \varepsilon_d/2\mathrm{k_B}$ dove N_D è la densità dei donori. Perciò

$$\frac{R_H(5K)}{R_H(20K)} = 10^6 = \left(\frac{5}{20}\right)^{-3/4} \exp\left[(\varepsilon_d/\mathrm{k_B})\left(\frac{3}{40}\right)\right].$$ Di qui,

$$\varepsilon_d/\mathrm{k_B} = \frac{40}{3}\ln\left[4^{-3/4} \times 10^6\right] = 13{,}3\ln(0{,}35 \times 10^6) = 170 \text{ K} = 14{,}6 \text{ meV}$$

2. Nota l'energia dei donori, la loro densità si ricava dalla relazione $\frac{T^{3/4}}{eA} = \sqrt{N_C N_D}$:

$$N_D = \frac{T^{3/2}}{e^2 A^2 N_C} = -\frac{1}{e^2 R_H^2 N_C} \exp(\varepsilon_d/k_B T) = \frac{1}{(1{,}6 \times 10^{-19})^2 \times (1{,}2)^2 \times 2{,}8 \times 10^{22}} \exp(170/20) = 4{,}8 \times 10^{18} \text{ m}^{-3}$$
.

Gli elettroni promossi in banda di conduzione seguono il modello dell'elettrone libero. Dunque

$$c_v^{el} \propto n\frac{T}{T_F}$$

Tuttavia nel semiconduttore drogato n è una funzione crescente di T . Inoltre T_F dipende da n.

$$T_F = \frac{\varepsilon_F}{k_B} \propto n^{2/3}$$

Quindi

$$c_v^{el} \propto n(T)\frac{T}{n^{2/3}(T)} \propto Tn^{1/3} \propto T^{5/4}\exp(\text{-}\varepsilon_d/6k_B T)$$