MATERIA CONDENSATA

Proff. P. Calvani e M. Capizzi

Prova di esonero - 27 Gennaio 2015

Esercizio 1.

Un semiconduttore intrinseco con gap diretta ε_g assorbe la radiazione di lunghezza d'onda $\lambda_0 \leq 1{,}25\ \mu$m. La sua banda di conduzione, intorno al minimo, è descritta da $\varepsilon_c = \varepsilon_g + Ak^2$ dove A = 0,86x10^{-26} erg cm^2; la densità di portatori intrinseci a temperatura ambiente è n_i(300 K) = 1,00x10^{12} cm^{-3}.

a) Trovare n_i(400 K).

b) Il semiconduttore viene drogato con N_d = 1,00x10^{14} cm^{-3} donori. Sapendo che la loro energia di ionizzazione è ε_d = 10,5 meV, ricavare il numero di elettroni liberi alla temperatura di 20 K.

c) Trovare il numero di elettroni liberi totali alla temperatura di 400 K.

Si ricorda che $N_c = 2\left(\dfrac{m^* k_B T}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$ Inoltre

$m = 9{,}11 \times 10^{-28}$ g; $h = 6{,}63 \times 10^{-27}$erg· s; c = $3{,}00 \times 10^{10}$ cm/s; $k_B = 1{,}38 \times 10^{-16}$ erg/K

Esercizio 2.

Si consideri in una dimensione una catena lineare di parametro reticolare *a,* costituita di *N* atomi tutti uguali di massa *m*. Se le interazioni fra atomi sono limitate a primi e secondi vicini del generico atomo *n*, rispettivamente con costanti elastiche γ e β, si determini:

1) l'espressione della curva di dispersione della pulsazione ω(*k*), in funzione dei parametri della catena;

2) l'espressione della pulsazione di Debye, sfruttando il risultato di cui al punto 1).

Soluzione 1.

a) L'energia della gap si ricava da

$$\varepsilon_g = \frac{hc}{\lambda_0} = \frac{6{,}63\times10^{-27}\times3{,}00\times10^{10}}{1{,}25\times10^{-4}} = 1{,}59\times10^{-12}\ \text{erg} = 11500\ \text{K}$$

$$n_i \propto T^{\frac{3}{2}}\exp(-\varepsilon_g/2k_BT) \Rightarrow$$

$$n_i(400) = n_i(300)\left(\frac{400}{300}\right)^{\frac{3}{2}}\exp[-(\varepsilon_g/2)(1/400-1/300)] =$$

$$= 1{,}00\times10^{12}\times1{,}54\times\exp[5750/1200] = 1{,}85\times10^{14}\ \text{cm}^{-3}$$

b) a 20 K si possono trascurare i portatori intrinseci e la concentrazione di elettroni è data da

$$n \cong (N_C N_d)^{\frac{1}{2}}\exp\left[\frac{-\varepsilon_d}{2k_BT}\right]$$

dove, poiché

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2A} = \frac{(1{,}06\times10^{-27})^2}{1{,}72\times10^{-26}} = 0{,}64\times10^{-28}\ \text{g},$$

$$N_c = 2\left(\frac{m^*k_BT}{2\pi\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\left(\frac{0{,}65\times10^{-28}\times1{,}38\times10^{-16}\times20}{6{,}28\times(1{,}05\times10^{-27})^2}\right)^{\frac{3}{2}} = 2\times(2{,}59\times10^{10})^{\frac{3}{2}} = 8{,}2\times10^{15}\ \text{cm}^{-3}.$$

Quindi

$$n \cong (8{,}2\times10^{15}\times1{,}00\times10^{14})^{1/2}\times\exp[-(10{,}5\times10^{-3}\times11{,}6\times10^{3})/40] =$$

$$= 4{,}3\times10^{13}\ \text{cm}^{-3}$$

c) Poiché a 400 K c'è coesistenza apprezzabile di portatori intrinseci ed estrinseci, dalla legge di azione di massa e dalla equazione di neutralità, si ricava

$$n = \frac{N_d^+}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_d^+}{2}\right)^2 + n_i^2} \cong \frac{N_d}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_d}{2}\right)^2 + n_i^2} = 0{,}50\times10^{14} + \sqrt{(0{,}50\times10^{14})^2 + (1{,}85\times10^{14})^2} = 2{,}4\times10^{14}\ \text{cm}$$

Soluzione 2.

1) Per semplice estensione di quanto trovato nel caso di interazione a primi vicini, essendovi in una catena lineare solo due secondi vicini, possiamo limitare la equazione del moto alla espressione

$$m\frac{d^2u_n}{dx^2} = \gamma(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n) + \beta(u_{n+2} + u_{n-2} - 2u_n)$$

che deve avere soluzioni del tipo modo normale $u_n = Ae^{i(k\cdot x-\omega t)}$.

Sostituendo otteniamo, analogamente al caso di interazione a soli primi vicini,

$$-m\omega^2 = \gamma\left(e^{ika} + e^{-ika} - 2\right) + \beta\left(e^{ik2a} + e^{-ik2a} - 2\right) =$$

$$2\gamma(coska - 1) + 2\beta(cos2ka - 1)$$

da cui si ottiene

$$\omega^2 = \frac{4}{m}\left(\gamma sin^2\frac{ka}{2} + \beta sin^2 ka\right)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{m}\left(\gamma sin^2\frac{ka}{2} + \beta sin^2 ka\right)}$$

2) In un modello di Debye la curva di dispersione effettiva dei fononi è sostituta da una curva di dispersione lineare con coefficiente angolare dato dalla velocità del suono, ossia dalla derivata alla curva stessa per k~0. k_D è a sua volta determinato conoscendo la densità degli stati D(ω) e imponendo che il suo integrale sino a ω_D sia pari al numero totale di atomi, oppure, più semplicemente, che il numero di stati nell'intervallo ($-k_D$, k_D) sia pari al numero di atomi N:

$$N = 2k_D\frac{L}{2\pi}$$ da cui si ottiene $k_D = \frac{\pi}{a}$ e $\omega_D = v_s k_D = v_s\frac{\pi}{a}$

La velocità del suono è data dalla derivata della curva di dispersione per k~0, ossia dalla

$$\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k\to 0} = \frac{d\sqrt{\left[\frac{1}{m}(\gamma k^2a^2 + 4\beta k^2a^2)\right]}}{dk} = \frac{d\left[ka\left(\sqrt{\left[\frac{1}{m}(\gamma + 4\beta)\right]}\right)\right]}{dk} = a\sqrt{\left[\frac{1}{m}(\gamma + 4\beta)\right]}$$

da cui

$$\omega_D = \pi\sqrt{\left[\frac{1}{m}(\gamma + 4\beta)\right]}$$