<u>FISICA DELLA MATERIA CONDENSATA</u>

Proff. P. Calvani e M. Capizzi

II prova di esonero - 4 Dicembre 2012

Esercizio 1.

Nel modello di Drude, la conducibilità elettrica è $\sigma = [(ne^2\lambda)/(mv_t)]$ dove n è la densita' dei portatori, λ è il cammino libero medio e v_t è la velocità termica.

1) In questo modello, stimare la resistività dell'Ag, monovalente, a temperatura ambiente (struttura fcc, peso atomico A=108, densità di massa $\rho=10.5\times10^3$ Kg m^{-3}) assumendo che ogni atomo contribuisca con i soli elettroni di valenza, con cammino libero medio λ pari a 100 volte la distanza fra atomi primi vicini e che l'energia cinetica media di ciascun elettrone sia uguale all'energia di Fermi che e' pari a 5.5 eV.
2) Dire come andrebbe trattato lo stesso problema nel modello di Sommerfeld; confrontare l'ordine di grandezza del risultato ottenuto al punto 1) con quello della conducibilità sperimentale dell'Ag, che a 300 K è pari a 0.63×10^8 Ω^{-1} m^{-1}; discutere l'origine dell'accordo o del disaccordo con il modello di Drude.
3) Supponendo di conoscere struttura, peso atomico e densità di massa del Si, che ha valenza 4, dire se lo stesso calcolo di cui al punto 1) darebbe un accordo peggiore, uguale o migliore con la conducibilità sperimentale del Si a temperatura ambiente, e perché.

Esercizio 2.

Un ipotetico semiconduttore ha una gap $\varepsilon_g = 0.85$ eV e una densità degli stati $N_C = 4{,}0\times10^{20}$ m^{-3} (che assumiamo indipendente dalla temperatura) nella banda di conduzione. Quest'ultima è descritta dalla legge di dispersione

$$\varepsilon_c = \varepsilon_g + Ak^2 + Bk^4$$

con $A = 0{,}20\times10^{-18}$ eV m^2 e B>0. Il semiconduttore è drogato solo con $N_d = 0{,}90\times10^{18}$ m^{-3} donori, ai quali gli elettroni sono legati con energia $\varepsilon_d = 0.022$ eV. Le masse efficaci degli elettroni e delle lacune sono uguali e indipendenti dalla temperatura.

a) Trovare la densità n di elettroni di conduzione a $T = 10$ K.
b) Trovare la densità n di elettroni e la densità p di lacune a $T = 800$ K.
c) Calcolare la conducibilità σ del semiconduttore a $T = 10$ K e $T = 800$ K assumendo che a tutte le temperature il tempo medio di scattering dei portatori sia dato da

$$\tau = \tau_0\left(1 - e^{-\frac{\Delta}{T}}\right)$$

con $\tau_0 = 1.0\times10^{-9}$ s e $\Delta = 20$ K.

Soluzioni

Esercizio 1

Alla conducibilità contribuiscono solo gli elettroni di valenza, la cui velocita' termica e' per ipotesi quella di Fermi, che in un metallo dipende poco dalla temperatura, per cui a temperatura ambiente

$$v_t = v_F = \left(\frac{2E_F}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{2\times 5.5\times 1.6\times 10^{-19}}{0.91\times 10^{-30}}\right)^{1/2} = 1.39\times 10^6\ ms^{-1}$$

Da densità e peso atomico si risale al numero di atomi per m^3 e, quindi, essendo l'Ag monovalente, al numero di elettroni per m^3, n.

$$n = \frac{\rho}{AM} = \frac{10.5\times 10^3}{108\times 1.67\times 10^{-27}} = 5.82\times 10^{28}\, m^{-3}$$

Poiche' l'Ag ha una struttura fcc con 4 atomi (e 4 elettroni) per cella unitaria, il passo reticolare e'

$$a = \left(\frac{4}{n}\right)^{1/3} = \left(\frac{4}{5.82\times 10^{28}}\right)^{1/3} = 4.09\times 10^{-10}\, m$$

mentre la distanza tra primi vicini e'

$$d = \frac{1}{2}\left(a^2 + a^2\right)^{1/2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = 2.89\times 10^{-10}\, m = \lambda/100$$

da cui si ricava

$$\sigma = \frac{ne^2\lambda}{mv_t} = \frac{5.82\times 10^{28}\times\left(1.6\times 10^{-19}\right)^2\times 100\times 2.89\times 10^{-10}}{0.91\times 10^{-30}\times 1.39\times 10^6} = 0.34\times 10^8\,\Omega^{-1}m^{-1}$$

e quindi

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 2{,}9\times 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$$

2) Il risultato per σ è in accordo con quello sperimentale a causa di errori nelle ipotesi del modello classico che si compensano fra loro:
- il cammino libero medio è molto più piccolo di quello reale;
- attribuire al singolo elettrone la velocità di deriva comporta una sua grave sottostima, perché va invece usata la velocità di Fermi.

3) Nettamente peggiore, in quanto gli elettroni che partecipano alla conduzione non sono i 4 di valenza per atomo di Si ma sono solo quelli eccitati termicamente in banda di conduzione, dell'ordine di 10^{16} m^{-3} a temperatura ambiente, motivo per cui i semiconduttori (ovvero gli isolanti) e i metalli non possono avere conducibilità confrontabili.

Esercizio 2

a) A $T = 10$ K domina il regime estrinseco. Quindi

$$n \cong \sqrt{N_c N_D}\exp\left(-\varepsilon_d/2k_BT\right) = \sqrt{4{,}0\times10^{20}\cdot 0{,}90\times10^{18}}\exp(-0{,}022\times11605/20) = 5{,}4\times10^{13}/\mathrm{m}^3$$

b) A $T = 800$ K assumiamo che i donori sono tutti ionizzati (in realta' ne e' ionizzato solo l'85% ma l'errore è piccolo) e domina il regime intrinseco. Quindi, poiché $m_e = m_b$, il potenziale chimico è $\mu = \varepsilon_g/2$ e N_c=N_v. Dunque il numero di elettroni intrinseci è

$$n_i = N_c\exp(-\varepsilon_g/2k_BT) = 4\times10^{20}\exp(-0.85\times11605/1600) = 8{,}4\times10^{17}\ \mathrm{m}^{-3}$$

Dall'equazione di neutralità di carica

$$N_d^+ + p - n = 0$$

si ricava

$$n^2 - nN_d - n_1^2 = 0$$

cioè

$$n = \frac{N_d}{2} + \sqrt{\left(\frac{N_d}{2}\right)^2 + n_i^2} = 4{,}5\times10^{17} + \sqrt{20{,}2\times10^{34} + 71{,}2\times10^{34}} = 1{,}41\times10^{18}\ \mathrm{m}^{-3}$$

Le lacune saranno invece

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{(8{,}4\times10^{17})^2}{1{,}41\times10^{18}} = 5{,}0\times10^{17}\ \mathrm{m}^{-3}$$

c) La massa efficace degli elettroni si ricava derivando la legge di dispersione della banda di conduzione in $k = 0$, ove per B=0 si trova il fondo della banda di conduzione, occupato da pochi elettroni:

$$m_e = \hbar^2\left[\frac{d^2\varepsilon_c}{dk^2}\right]_0^{-1} = \frac{\left(1{,}05\times10^{-34}\right)^2}{0{,}40\times10^{-18}\times1{,}6\times10^{-19}} = 1{,}7\times10^{-31}\ \mathrm{kg} = 0{,}19\,m_0$$

essendo

$$\left.\frac{d^2\varepsilon_c}{dk^2}\right|_0 = \left.\frac{d^2}{dk^2}(\varepsilon_g + Ak^2 + Bk^4)\right|_0 = 2A = 0{,}40\times10^{-18}\ \mathrm{eV\,m}^2$$

A 10 K, non essendoci praticamente portatori intrinseci, la conducibilità è

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} = \frac{ne^2\tau_0}{m_e}\left(1 - e^{-\frac{\Delta}{T}}\right) = \frac{5.4\times10^{13}\cdot(1{,}6\times10^{-19})^2\cdot0{,}86\times10^{-9}}{1{,}7\times10^{-31}} = 7{,}0\times10^{-3}\ (\Omega\,\mathrm{m})^{-1}$$

A 800 K invece, con $m_e = m_b$ indipendenti da T,

$$\sigma = \frac{(n+p)e^2\tau_0}{m_e}\left(1 - e^{-\frac{\Delta}{T}}\right) = \frac{(14{,}1 + 5{,}0)\times 10^{17}\cdot(1{,}6\times 10^{-19})^2\cdot 2{,}5\times 10^{-11}}{1{,}7\times 10^{-31}} = 7{,}2\ (\Omega\,\mathrm{m})^{-1}$$