7 Settembre 2010

Esercizio 1

L'alluminio è un metallo trivalente che cristallizza nella struttura cubica a facce centrate. Ha una densità d = 2700 kg/m^3 e la costante di Hall è

$$R_H = -\frac{1}{ne} = -3{,}5 \times 10^{-11}\mathrm{m^3/C}$$

dove n è il numero di elettroni di conduzione per metro cubo.

a) Si trovino il parametro reticolare a (lato della cella cubica) e la massa atomica M dell'Al.

b) Si trovi la temperatura di Debye dell'Al

$$T_D = \frac{\hbar}{k_B} v_s \left(\frac{6\pi^2 N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

dove v_s è la velocità del suono per grandi lunghezze d'onda e N/V il numero di atomi per m^3, sapendo che la dispersione di ciascuna branca acustica è

$$\omega(k) = \sqrt{\frac{4C}{M}} \sin(\frac{1}{2}ka)$$

dove C = 3,82 N/m . Inoltre $\hbar = 1{,}05 \times 10^{-34}$ J$\cdot$s, $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K , e = 1,60 ×10^{-19} C e c = 2,99×10^8 m/s.

c) La capacità termica dell'Al a bassa temperatura, misurata a volume costante e per unità di massa, si può scrivere

$c_v = AT^\alpha + BT^\beta$

dove A = 5,14×10^{-2} unità del SI. A 2 K, si ha $c_v(2\ \mathrm{K}) = 0{,}108$ J/kg K. Dire quanto valgono α e β ($\alpha < \beta$) e trovare il valore di c_v a 3 K.

Soluzione

a) (4 punti)
Dalla costante di Hall si ricava n_{el} = 1,8×10^{29} /m^3. Poiché Al è trivalente,

$$n_{at} = \frac{1}{3}n_{el} = 6\times10^{28}\ /\ \mathrm{m}^3 = 4/V = 4/a^3$$

dove 4 è il numero di atomi per cella unitaria fcc. Di qui,

$$a = \sqrt[3]{\frac{4}{n_{at}}} = \sqrt[3]{66 \times 10^{-30}} = 4{,}04 \times 10^{-10}\ \mathrm{m}$$

Inoltre

$$M = \frac{d}{n_{at}} = \frac{2700}{6 \times 10^{28}} = 4{,}50 \times 10^{-26}\ \mathrm{kg}$$

b) (7 punti)

Essendo note *a* e *M*, (punto a), bisogna trovare la velocità del suono, che nel modello di Debye è costante e uguale al suo limite per grandi lunghezze d'onda. Perciò v_s si ottiene derivando la relazione di dispersione della banda acustica e facendo tendere *k* a 0:

$$v_s = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k\to 0} = \left.\sqrt{\frac{C}{M}}a\cos(\frac{1}{2}ka)\right|_{k\to 0} = \sqrt{\frac{C}{M}}a = \sqrt{\frac{3{,}82}{4{,}5\times 10^{-26}}}4{,}04\times 10^{-10} = 3720 \text{ m/s}$$

Quindi

$$T_D = \frac{\hbar}{k_B}v_s\left(6\pi^2 n_{at}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1{,}05\times 10^{-34}}{1{,}38\times 10^{-23}}\cdot 3720\cdot\sqrt[3]{6\pi^2\cdot 6\times 10^{28}} = 427\text{ K}$$

c) (4 punti)
Poiché il calore specifico è la somma del contributo elettronico e di quello del reticolo, e $\alpha < \beta$, α =1 e $\beta = 3$. Quindi

$$c_v(2K) = AT + BT^3 = 2A + 8B$$

$$B = \frac{c_v(2K) - 2A}{8} = \frac{0{,}108 - 0{,}1028}{8} = 0{,}65\times 10^{-3}\text{ J/kgK}^4$$

A 3 K, pertanto,

$$c_v(3K) = 3A + 27B = 3\times 0{,}0514 + 27\times 0{,}65\times 10^{-3} = 0{,}172\text{ J/kgK}$$

Esercizio 2

In un semiconduttore intrinseco la concentrazione degli elettroni n(T) a 500K e a 600K sia

$n(500)=2.5\times10^{20}$ m^{-3} e $n(600)=2\times10^{21}$ m^{-3} , mentre la conducibilita' a 500K sia

$\sigma(500)=4\times10^{-4}\ \Omega^{-1}\ \text{m}^{-1}$.

Sapendo che in tale semiconduttore il potenziale chimico si trova sempre a meta' della gap di energia e ipotizzando che le mobilita' degli elettroni e delle lacune siano indipendenti dalla temperatura fra 500 K e 600 K, con quella degli elettroni pari a 4 volte quella delle lacune, determinare

a) l'energia della gap;
b) la massa efficace dei portatori;
c) il valore dei tempi di rilassamento per elettroni e lacune.
d) quale delle ipotesi del problema e' in realta' incompatibile con l'essere il semiconduttore intrinseco.

Si ricorda che

$$\sigma = n_e e\mu_e + n_h e\mu_h$$

$$\mu(T) = \varepsilon_v + \frac{E_G(T)}{2} + \frac{3}{4}k_B T \ln\left(\frac{m_e}{m_h}\right)$$

$$n_i(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_B T}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(m_e m_h)^{3/4} e^{-\frac{E_G}{2k_BT}}$$

Soluzione

In un semiconduttore intrinseco le concentrazioni degli elettroni e delle lacune sono uguali. Nel presente caso, inoltre, sono uguali anche le masse efficaci dei due portatori, in quanto il potenziale chimico μ si trova sempre a meta' gap). Pertanto

a) 7 punti

$$n_e = n_h = n_i$$

$$m_e = m_h = m$$

$$\sigma(T) = n_i(T)\cdot e\cdot(\mu_e + \mu_h)$$

$$n_i(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_B T}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}(m)^{3/2} e^{-\frac{E_G}{2k_BT}}$$

Inoltre, dalla relazione

$$\mu_e = \frac{e\tau_e}{m_e} = 4\mu_h = 4\frac{e\tau_h}{m_h}$$

segue $\tau_e = 4\tau_h$ fra 500K e 600K.

La concentrazione dei portatori risulta dipendere percio' solo dalla massa dei portatori e dalla energia di gap. Essendo nota tale concentrazione a due temperature, ho

$$n_i(500) = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_B 500}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} m^{3/2} e^{-\frac{E_G}{2k_B 500}} = 2.5\times10^{20} m^{-3}$$

$$n_i(600) = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_B 600}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} m^{3/2} e^{-\frac{E_G}{2k_B 600}} = 2\times10^{21} m^{-3}$$

Dal rapporto ottengo una equazione nella sola energia di gap

$$8 = \frac{n_i(600)}{n_i(500)} = \left(\frac{600}{500}\right)^{3/2} e^{-\frac{E_G}{2k_B 600}} e^{\frac{E_G}{2k_B 500}} = (1.2)^{3/2} e^{\frac{E_G}{2k_B}\left(\frac{600-500}{600\times500}\right)} = (1.2)^{3/2} e^{\frac{E_G}{2k_B}\left(\frac{1}{3000}\right)}$$

$$\ln(8/1.31) = \frac{E_G}{2k_B \times 3000}$$

$$\frac{E_G}{k_B} = 10856K$$

ovvero $E_G = 1{,}50\times10^{-19}$ J = 0.936 eV.

b) 3 punti

Da qui segue

$$n_i(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_B T}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} m^{3/2} e^{-\frac{E_G}{2k_B T}}$$

$$m = \left[n_i(T)\times 4\times\left(\frac{2k_B T}{\pi\hbar^2}\right)^{-3/2} e^{\frac{E_G}{2k_B T}}\right]^{2/3} = \left(n_i(T)\times 4\right)^{2/3}\left(\frac{\pi\hbar^2}{2k_B T}\right) e^{\frac{E_G}{3k_B T}}$$

(a 500 K) :

$$= \left(2.5\times10^{20}\times 4\right)^{2/3}\times\left(\frac{\pi\times(1.05\times10^{-34})^2}{1000\times1.38\times10^{-23}}\right)\times e^{\frac{10856}{1500}} = 1\times10^{14}\times2.51\times10^{-48}\times1.39\times10^{3} =$$

$$= 3.49\times10^{-31} Kg = 0.38\, m_0$$

c) 3 punti

Inoltre

$$\sigma(T) = n_i(T)\cdot e\cdot(\mu_e + \mu_h) = n_i(T)\cdot e\cdot 5\mu_h = n_i(T)\cdot e\cdot 5\frac{e\tau_h}{m}$$

$$\tau_h = \frac{m\sigma(T)}{n_i(T)\cdot e^2\cdot 5} = \frac{3.49\times10^{-31}\times 4\times10^{-4}}{2.5\times10^{20}\times(1.602)^2\times10^{-38}\times 5} = 0.43\times10^{-17}\,s$$

$$\tau_e = 4\tau_h = 1.72\times10^{-17}\,s$$

d) 2 punti

Essendo il semiconduttore intrinseco, le mobilita' degli elettroni e delle lacune dipendono dalla temperatura solo per l'interazione con i fononi, che cresce al crescere della temperatura. Pertanto le mobilita' di elettroni e lacune in un semiconduttore intrinseco non possono essere costanti con la temperatura. Diverso sarebbe stato il discorso per le conducibilita', che crescono con la temperatura attraverso le concentrazioni dei portatori mentre decrescono attraverso le mobilita' (o i tempi di scattering), per cui si potrebbe avere un andamento accidentalmente costante con T in un ristretto intervallo di temperature.