Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 2 febbraio 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [12 punti]. In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con l'asse z verticale discendente, si muove una lastra circolare omogenea di raggio R e massa M [si veda la Fig. 1]. Il punto A sul bordo della lastra è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x. La lastra è libera di ruotare rigidamente attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxz, passante per A, ed è soggetta alla forza peso $\underline{F}_\mathrm{p}$ e alla forza elastica $\underline{F}_\mathrm{e} = -K\,\underline{\mathrm{OB}}$, con $K > 0$ e B punto sul bordo della lastra diametralmente opposto ad A. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che il diametro AB della lastra forma con la direzione verticale discendente [si veda la Fig. 1]. Si indichi con $g > 0$ l'accelerazione di gravità e con G il centro di massa della lastra.

1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro adimensionale $\lambda \equiv \frac{Mg}{KR} > 0$.
3. Ponendo ora, $R = 1$, $M = 1$, $K = 5$, $g = 10$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lastra circolare rispetto al suo centro di massa G è $I_\mathrm{G} = \frac{1}{2}MR^2$.

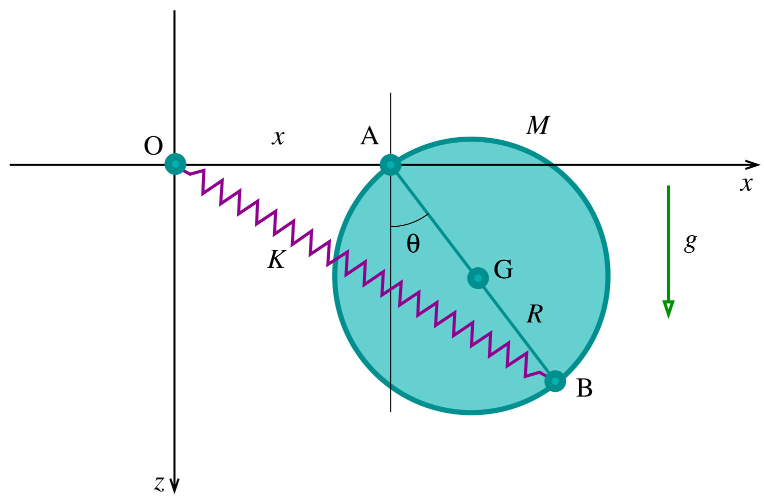

Fig. 1

2. Trasformazioni canoniche [6 punti]. È assegnata la trasformazione

$$Q = \ln(1 + q^\alpha \cos p),$$
$$P = 2(1 + \sqrt{q}\cos p)\, q^\delta \sin p,$$

dalle variabili canoniche q, p alle variabili Q, P, con α, δ parametri reali.

1. Deterninare una coppia di valori di α, δ per cui la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica, $F_3(p, Q)$.

Si ricordi che

$$\frac{\mathrm{d}(\tan p)}{\mathrm{d}p} = \frac{1}{\cos^2 p}.$$

Il testo segue alla pagina successiva ⇒

3. Trasformazioni di Lorentz [6 punti]. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate (ct, x, y, z). Siano dati due eventi E_1, E_2 che, nel sistema di riferimento dato, hanno coordinate

$$E_1 = (\sqrt{\alpha^2 + \alpha}, 2, 0, 3)\,, \qquad E_2 = (0, 2, -\sqrt{2}, 3)$$

dove α è un parametro reale tale che $\alpha \geq 0$ oppure $\alpha \leq -1$.

1. Determinare per quali valori di α esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi E_1, E_2 sono simultanei e, per questi valori, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

2. Determinare per quali valori di α esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, per questi valori, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

4. Urti [6 punti]. Una particella di massa di riposo $M = \lambda m$ (con $\lambda \geq 2$) si muove con velocità $V = \frac{2}{\sqrt{5}}c$ diretta lungo l'asse x. Ad un certo istante essa decade in due particelle identiche di massa m che si muovono nel piano xy con velocità $\vec{v} = (v_x, v_y, 0)$ e $\vec{v}' = (v'_x, v'_y, 0)$.

1. Dimostrare che, se le componenti y delle velocità delle due particelle di massa m sono uguali in modulo e opposte in verso ($v_y = -v'_y$), allora le loro componenti x sono uguali in modulo e verso ($v_x = v'_x$).

Assumendo di trovarsi nella situazione descritta al punto 1, si calcoli:

2. il valore di v_x;

3. il valore di v_y in funzione di λ.

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 2 febbraio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $x_\mathrm{G} = x + R\sin\theta$, $z_\mathrm{G} = R\cos\theta$, $x_\mathrm{A} = x$, $x_\mathrm{B} = x + 2R\sin\theta$, $z_\mathrm{B} = 2R\cos\theta$; $\dot{x}_\mathrm{G} = \dot{x} + R\cos\theta\,\dot{\theta}$, $\dot{z}_\mathrm{G} = -R\sin\theta\,\dot{\theta}$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_\mathrm{G}^2 + \dot{z}_\mathrm{G}^2\right) + \frac{1}{2}I_\mathrm{G}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{3}{2}R^2\,\dot{\theta}^2 + 2R\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = -Mgz_\mathrm{G} + \frac{1}{2}K\left(x_\mathrm{B}^2 + z_\mathrm{B}^2\right) = -MgR\cos\theta + \frac{1}{2}K\left(x^2 + 4Rx\sin\theta + 4R^2\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = Kx + 2KR\sin\theta, \qquad \partial_\theta U = MgR\sin\theta + 2KRx\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -2R\sin\theta, \qquad (Mg - 4KR\cos\theta)\sin\theta = 0.$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $x_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $x_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta \neq 0$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{Mg}{4KR}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$, e $x_{3,4} = \mp 2R\sqrt{1 - \left(\frac{Mg}{4KR}\right)^2}$.
Queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{Mg}{KR} \equiv \lambda \leq 4.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = MgR\cos\theta - 2KRx\sin\theta, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 2KR\cos\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $K^2R^2(\lambda - 4)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\lambda > 4$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-K^2R^2(\lambda + 4)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ si ha che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda > 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 < \lambda \leq 4$.
Riassumendo, per $0 < \lambda \leq 4$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda > 4$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.

3. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\lambda = 2$, quindi le posizioni di equilibrio stabile sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M = 1, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2 = \frac{3}{2}, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = MR\cos\theta = \frac{1}{2}.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K = 5, \qquad U_{\theta\theta} = 4KR^2 = 20, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = 2KR\cos\theta = 5.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(5 - \omega^2\right)\left(20 - \frac{3}{2}\,\omega^2\right) - \left(5 - \frac{1}{2}\,\omega^2\right)^2 = 0,$$

ovvero

$$\omega^4 - 18\,\omega^2 + 60 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = 9 \pm \sqrt{21}$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 3.69$ e $\omega_- \approx 2.10$.

2. Trasformazioni canoniche.
Per fissare i parametri α, δ calcoliamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial q} &= \frac{\alpha\, q^{\alpha-1}\cos p}{1+q^\alpha\cos p}\\
\frac{\partial P}{\partial p} &= -2\, q^{\delta+1/2}\sin^2 p + 2(1+\sqrt{q}\cos p)\, q^\delta \cos p\\
\frac{\partial Q}{\partial p} &= \frac{-q^\alpha \sin p}{1+q^\alpha\cos p}\\
\frac{\partial P}{\partial q} &= q^{\delta-1/2}\sin p\cos p + 2\delta(1+\sqrt{q}\cos p)\, q^{\delta-1}\sin p
\end{aligned}$$

e imponiamo la condizione:

$$[Q,P]_{q,p} = \frac{2(1+\sqrt{q}\cos p)}{1+q^\alpha\cos p} q^{\alpha+\delta-1}(\alpha\cos^2 p + \delta\sin^2 p) + \frac{1-2\alpha}{1+q^\alpha\cos p} q^{\alpha+\delta-1/2}\sin^2 p\cos p = 1,$$

dalla quale segue che $\alpha = \frac{1}{2}$, $\delta = \frac{1}{2}$. La trasformazione canonica si può quindi riscrivere:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{(e^Q-1)^2}{\cos^2 p},\\
P &= 2(e^{2Q}-e^Q)\tan p.
\end{aligned}$$

Integrando il differenziale $dF_3(p,Q) = -q\,dp - P\,dQ$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
F_3(p,Q) &= -\int P\mathrm{d}Q = -(e^{2Q}-2e^Q)\tan p + f(p)\\
&= -\int q\mathrm{d}p = -(e^Q-1)^2\tan p + g(Q)\\
&= -(e^Q-1)^2\tan p,
\end{aligned}$$

with $f(p) = -\tan p$ and $g(Q) = 0$.

3. Trasformazioni di Lorentz.
La separazione tra gli eventi E_1 ed E_2 è

$$\Delta E = (\sqrt{\alpha^2+\alpha}, 0, \sqrt{2}, 0)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale è

$$|\Delta E|^2 = \alpha^2 + \alpha - 2 = (\alpha+2)(\alpha-1)$$

1. L'intervallo è di tipo spazio se $|\Delta E|^2 < 0$ ovvero $-2 < \alpha \le -1$ oppure $0 \le \alpha < 1$. Per questi valori esiste un riferimento (ct', x', y', z') in cui gli eventi sono simultanei. Esso si ottiene dal riferimento di partenza con una trasformazione di Lorentz speciale lungo l'asse y,

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma\left(t - \frac{vy}{c^2}\right)\\
x' &= x\\
y' &= \gamma(y - vt)\\
z' &= z
\end{aligned}$$

dove $\beta = v/c$ è dato da

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{c\Delta t}{\Delta y} = \sqrt{\frac{\alpha^2+\alpha}{2}}\,.$$

2. L'intervallo è di tipo tempo se $|\Delta E|^2 > 0$ ovvero $\alpha < -2$ oppure $\alpha > 1$. Per questi valori esiste un riferimento (ct', x', y', z') in cui gli eventi avvengono nella stessa posizione. Esso si ottiene dal riferimento di partenza con una trasformazione di Lorentz speciale lungo l'asse y,

$$\begin{aligned} t' &= \gamma\left(t - \frac{vy}{c^2}\right) \\ x' &= x \\ y' &= \gamma(y - vt) \\ z' &= z \end{aligned}$$

dove $\beta = v/c$ è dato da

$$\Delta y'' = \gamma(\Delta y - \beta c\Delta t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\Delta y}{c\Delta t} = \sqrt{\frac{2}{\alpha^2+\alpha}}\,.$$

4. Urti.

Il quadri-impulso iniziale è

$$P_{\text{in}} = (M\Gamma c, m\Gamma V, 0, 0), \qquad \Gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2} = \sqrt{5}$$

e quelli delle due particelle di stato finale

$$\begin{aligned} P &= (m\gamma c, m\gamma v_x, m\gamma v_y, 0) & \gamma &= \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ P &= (m\gamma' c, m\gamma' v'_x, m\gamma' v'_y, 0) & \gamma' &= \left(1 - \frac{v_x'^2}{c^2} - \frac{v_y'^2}{c^2}\right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Per conservazione del quadri-impulso durante il decadimento, $P_{\text{in}} = P + P'$, si ha

$$\begin{aligned} M\Gamma c &= m(\gamma + \gamma')c, \\ M\Gamma V &= m(\gamma v_x + \gamma' v'_x), \\ 0 &= m(\gamma v_y + \gamma' v'_y). \end{aligned}$$

1. Assumendo $v_y = -v'_y$, l'ultima equazione fornisce la relazione $\gamma = \gamma'$, da cui segue immediatamente $|v_x| = |v'_x|$. La seconda equazione diventa quindi

$$M\Gamma V = m\gamma|v_x|\left(\operatorname{sign} v_x + \operatorname{sign} v'_x\right),$$

   che sarebbe zero se i segni di v_x e v'_x non fossero uguali.

2. Sotto queste condizioni, le prime due equazioni diventano

$$\begin{aligned} M\Gamma c &= 2m\gamma c, \\ M\Gamma V &= 2m\gamma v_x, \end{aligned}$$

   da cui segue immediatamente (sostituendo la prima nella seconda) $v_x = V = \frac{2}{\sqrt{5}}c$.

3. Dalla prima di queste equazioni, si ha

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{2m}{M\Gamma} = \frac{2}{\sqrt{5}\lambda} \qquad \Rightarrow \qquad 1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2} = \frac{4}{5\lambda^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v_y^2}{c^2} = 1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{4}{5\lambda^2} = 1 - \frac{4}{5} - \frac{4}{5\lambda^2} = \frac{\lambda^2-4}{5\lambda^2}$$

   da cui segue $v_y = \sqrt{\frac{\lambda^2-4}{5\lambda^2}}c$, che esiste per $\lambda \geq 2$ (come da ipotesi).