

Compito scritto di Meccanica Statistica del 5/9/2025
Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche, di massa m , non interagenti, in equilibrio con un termostato alla temperatura T . Il gas è confinato nella regione di spazio $z \geq 0$ e l'Hamiltoniana di singola particella è

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{p^2}{2m} + mgz + \frac{1}{2}K(x^2 + y^2),$$

dove $\vec{p}$ è l'impulso, $p \equiv |\vec{p}|$, $\vec{q}$ è il vettore posizione, di componenti Cartesiane (x, y, z) , $g > 0$ e $K > 0$ sono costanti dimensionali. La quantità $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ misura la distanza di una particella dall'asse z .

Si assuma che le particelle siano descritte dalla fisica classica.

1. [3 punti] Calcolare l'energia interna per particella $u \equiv U/N$.
2. [3 punti] Calcolare la probabilità $P(z_0, r_0)$ che una particella abbia simultaneamente $z \geq z_0$ e $r \geq r_0$, dove $z_0 \geq 0$ e $r_0 \geq 0$ sono valori assegnati.
3. [4 punti] Calcolare il valor medio di z , $\langle z \rangle$, e il valor medio di r , $\langle r \rangle$.

Si assuma ora che le particelle siano bosoni con spin $s = 0$.

4. [4 punti] Trovare la temperatura di condensazione T_0 , in funzione di N .
5. [3 punti] Calcolare l'energia interna per particella u alla temperatura $T \leq T_0$, in funzione di T e T_0 .
6. [3 punti] Trovare la frazione di particelle nel condensato N_0/N per $T = \frac{1}{4}T_0$.

Si assuma ora che le particelle siano fermioni con spin $s = \frac{1}{2}$ e il gas si trovi a $T = 0$ K.

7. [3 punti] Calcolare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione di N .
8. [4 punti] Calcolare l'energia interna per particella u in funzione di ϵ_F .
9. [3 punti] Calcolare i valori massimi di p , z e r , rispettivamente, $p_{\max}$, $z_{\max}$, e $r_{\max}$, in funzione di ϵ_F .

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$. In particolare, $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{105}{16}\sqrt{\pi}$; $\zeta\left(\frac{7}{2}\right) \approx 1.127$, $\zeta\left(\frac{9}{2}\right) \approx 1.055$.

Risoluzione

Particelle classiche

1. Posto $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$ e adottato un sistema di coordinate polari per l'integrale sulle variabili x, y , la funzione di partizione di singola particella è

$$Z_1 = \frac{2\pi}{h^3} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z \int_0^{\infty} dz \int_0^{\infty} dr r e^{-\beta \left(\frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + mgz + \frac{1}{2} K r^2 \right)} =$$

$$\frac{2\pi}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \frac{1}{\beta mg} \frac{1}{\beta K} = \frac{(2\pi)^{5/2} m^{1/2}}{h^3 K g \beta^{7/2}}$$

e l'energia interna per particella è

$$u = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1 = \frac{7}{2} k_B T.$$

2. La probabilità cercata è

$$P(z_0, r_0) = \frac{\int_{z_0}^{\infty} e^{-\beta mgz} dz \int_{r_0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta K r^2} r dr}{\int_0^{\infty} e^{-\beta mgz} dz \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta K r^2} r dr} = e^{-\beta \left(mgz_0 + \frac{1}{2} K r_0^2 \right)}.$$

3. Con il cambio di variabile $s = \beta mgz$ si trova facilmente

$$\langle z \rangle = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\beta mgz} z dz}{\int_0^{\infty} e^{-\beta mgz} dz} = \frac{k_B T}{mg}$$

e con il cambio di variabile $t = \frac{1}{2}\beta K r^2$ si trova

$$\langle r \rangle = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta K r^2} r^2 dr}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta K r^2} r dr} = \left(\frac{2}{\beta K} \right)^{1/2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{\pi k_B T}{2K} \right)^{1/2}.$$

Bosoni

Posta $g_s \equiv 2s + 1$ la degenerazione di spin, calcoliamo per iniziare la densità degli stati

$$g(\epsilon) = \frac{g_s}{h^3} \int d^3\vec{r} d^3\vec{p} \delta(\mathcal{H} - \epsilon).$$

Introducendo un sistema di coordinate polari per l'integrazione su x, y e un sistema di coordinate sferiche per l'integrazione su $\vec{p}$, troviamo

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{8\pi^2 g_s}{h^3} \int_0^\infty dp p^2 \int_0^\infty dz \int_0^\infty dr r \delta\left(\frac{1}{2}Kr^2 + mgz + \frac{p^2}{2m} - \epsilon\right) \\ &= \frac{8\pi^2 g_s}{mgKh^3} \int_0^\infty dp p^2 \left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right) \theta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right) = \frac{32\pi^2(2m)^{1/2} g_s}{15gKh^3} \epsilon^{5/2} \theta(\epsilon). \end{aligned}$$

4. Posto $k_B T_0 \equiv \beta_0^{-1}$, essendo la minima energia $\epsilon_{\min} = 0$, per trovare la temperatura di condensazione T_0 scriviamo

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{32\pi^2(2m)^{1/2}}{15gKh^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{5/2}}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{32\pi^2(2m)^{1/2}}{15gKh^3 \beta_0^{7/2}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \zeta\left(\frac{7}{2}\right),$$

dove si è posto $g_s = 1$, da cui

$$k_B T_0 = \left[\frac{15gKh^3 N}{32\pi^2(2m)^{1/2}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \zeta\left(\frac{7}{2}\right) \right]^{2/7}.$$

5. Siccome per $T < T_0$ le particelle nel condensato non contribuiscono, per calcolare l'energia media per particella scriviamo

$$u = \frac{1}{N} \int \frac{\epsilon g(\epsilon)}{e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{32\pi^2(2m)^{1/2}}{15gKh^3 N} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{7/2}}{e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{32\pi^2(2m)^{1/2}}{15gKh^3 N \beta^{9/2}} \Gamma\left(\frac{9}{2}\right) \zeta\left(\frac{9}{2}\right).$$

Sostituendo l'espressione per N in funzione di T_0 , troviamo

$$u = \frac{\Gamma\left(\frac{9}{2}\right) \zeta\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \zeta\left(\frac{7}{2}\right)} \frac{k_B T^{9/2}}{T_0^{7/2}} = \frac{7 \zeta\left(\frac{9}{2}\right)}{2 \zeta\left(\frac{7}{2}\right)} \frac{k_B T^{9/2}}{T_0^{7/2}} \approx 3.276 \frac{k_B T^{9/2}}{T_0^{7/2}}.$$

6. Per $T < T_0$, le particelle fuori dal condensato sono

$$N_{>} = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{32\pi^2(2m)^{1/2}}{15gKh^3 \beta^{7/2}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \zeta\left(\frac{7}{2}\right) = N \left(\frac{T}{T_0}\right)^{7/2}.$$

Allora, la frazione di particelle nel condensato è

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_{>}}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{7/2} \Rightarrow \frac{N_0(T = \frac{1}{4}T_0)}{N} = 1 - \frac{1}{2^7} = \frac{127}{128} \approx 0.992.$$

Solo 8 particelle su 1000 sono fuori dal condensato.

Fermioni

7. Abbiamo

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{64\pi^2(2m)^{1/2}}{15gKh^3} \theta(\epsilon_F) \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{5/2} d\epsilon = \frac{128\pi^2(2m)^{1/2}}{105gKh^3} \epsilon_F^{7/2} \theta(\epsilon_F),$$

dove si è posto $g_s = 2$, da cui

$$\epsilon_F = \left[\frac{105gKh^3N}{128\pi^2(2m)^{1/2}} \right]^{2/7}.$$

8. L'energia media per particella è

$$u = \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \frac{64\pi^2(2m)^{1/2}}{15gKh^3N} \theta(\epsilon_F) \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{7/2} d\epsilon = \frac{128\pi^2(2m)^{1/2}}{135gKh^3N} \epsilon_F^{9/2}.$$

Sostituendo l'espressione per N in funzione di ϵ_F , troviamo

$$u = \frac{7}{9} \epsilon_F.$$

9. Per una particella al livello di Fermi deve valere

$$\epsilon_F = \frac{p^2}{2m} + mgz + \frac{1}{2}Kr^2.$$

Poiché i tre termini a secondo membro sono tutti positivi, il valore massimo di ciascuno si ottiene ponendo uguali a zero gli altri due. Si ha quindi

$$p_{\max} = \sqrt{2m\epsilon_F}, \quad z_{\max} = \frac{\epsilon_F}{mg}, \quad r_{\max} = \sqrt{\frac{2\epsilon_F}{K}}.$$