Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 6 luglio 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove un disco rigido e omogeneo, di raggio R e massa M. Il punto A sul bordo del disco è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Oy. Il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il punto B del disco, diametralmente opposto ad A, è attratto verso il punto fisso P$=(a,0)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,\mathrm{PB}$, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ordinata y di A e l'angolo θ che il diametro AB del disco forma con il verso positivo dell'asse Oy (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange L del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $a/R \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $a = R = 1$, $K = 1$, $M = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_\mathrm{G} = \frac{1}{2}MR^2$.

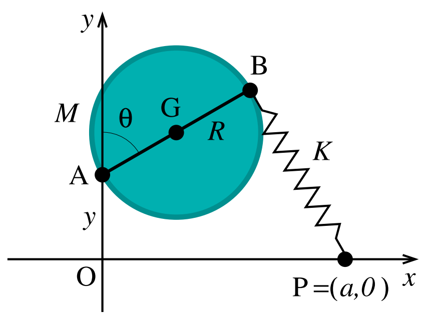

Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$q = \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{1}{6}} p^{-\frac{2}{9}}$$

$$P = 3\,p^{-\left(\frac{2\mu+3}{9}\right)} \left(\frac{Q}{\alpha}\right)^{\frac{\mu}{6}}$$

dalle variabili canoniche Q, p alle variabili q, P, dire per quali valori dei parametri reali α, μ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Un'astronave parte dalla Terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $v_1 = \frac{3}{5}c$. Quando a bordo è trascorso un tempo $4T_0$ (con $T_0 = 1$ anno), l'astronave inverte il verso del moto e torna a Terra, muovendosi con velocità $v_2 = \frac{c}{2}$. Determinare, al ritorno a Terra dell'astronave, quanto tempo è trascorso dalla sua partenza nel sistema di riferimento solidale con la Terra, e nel sistema di riferimento solidale con l'astronave.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 25 giugno 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_G = R\sin\theta$, $y_G = y + R\cos\theta$, $x_B = 2R\sin\theta$, $y_B = y + 2R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{y}^2 + \frac{3}{2}R^2\,\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\,\dot{y}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_B - x_P)^2 + (y_B - y_P)^2\right] = \frac{1}{2}K\left(y^2 + 4Ry\cos\theta - 4Ra\sin\theta\right) + \frac{1}{2}K\left(4R^2 + a^2\right).$$

La funzione di Lagrange è $L = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{y} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(y + 2R\cos\theta\right), \qquad M\left(\frac{3}{2}R^2\,\ddot{\theta} - R\sin\theta\,\ddot{y}\right) = 2KR\left(y\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K(y + 2R\cos\theta), \qquad \partial_\theta U = -2KR\left(y\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$y = -2R\cos\theta, \qquad (2R\sin\theta - a)\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $y_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $y_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{a}{2R}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè $y_3 = -\sqrt{4R^2 - a^2}$ e $y_4 = \sqrt{4R^2 - a^2}$. Queste due posizioni esistono solo se

$$-1 < \frac{a}{2R} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad -2 < \frac{a}{R} < 2.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{yy}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = 2KR\left(a\sin\theta - y\cos\theta\right), \quad \partial^2_{y\theta}U = \partial^2_{\theta y}U = -2KR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $2K^2R(a - 2R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (y_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{R} > 2$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-2K^2R(a + 2R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per $\frac{a}{R} < -2$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $-2 < \frac{a}{R} < 2$.
Riassumendo, per $\frac{a}{R} < -2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile e la seconda stabile; per $-2 < \frac{a}{R} < 2$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{R} > 2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{y}\dot{y}} = M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{3}{2}MR^2, \qquad T_{\dot{y}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{y}} = -MR\sin\theta = -\frac{1}{2}Ma.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K, \qquad U_{\theta\theta} = 4KR^2, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$R^2\left(K - M\omega^2\right)\left(4K - \frac{3}{2}M\omega^2\right) - a^2\left(K - \frac{1}{2}M\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$5\,\omega^4 - 18\,\omega^2 + 12 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 2.717,\ \omega_-^2 = 0.8835.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.648$ e $\omega_- = 0.9399$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo:

$$Q = \alpha\, q^6\, p^{4/3}, \\ P = 3\, q^\mu\, p^{-1/3}.$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene $\mu = -5$ e $\alpha = \frac{1}{14}$. Sappiamo che

$$dF_2(q, P) \;=\; p\,dq \;+\; Q\,dP.$$

Per ottenere $F_2(q, P)$ bisogna quindi esprimere p e Q come funzioni di q e P. Ottrniamo:

$$p = 27\, q^{-15}\, P^{-3}, \\ Q = \frac{81}{14}\, P^{-4}\, q^{-14},$$

ed integrando $p\,dq$ o, alternativamente, $Q\,dP$ otteniamo

$$F_2(q, P) = -\frac{27}{14}\, q^{-14}\, P^{-3}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Prendendo come origine del tempo coordinato t e del tempo proprio dell'astronave τ l'istante in cui l'astronave parte, siano t_1, τ_1 il tempo coordinato e il tempo proprio nel momento in cui questa inverte il suo senso di marcia, e siano t_2, τ_2 il tempo coordinato e il tempo proprio al ritorno a terra. Sarà, essendo $v_1 = \frac{3}{5}c$ e $v_2 = \frac{c}{2}$,

$$\tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}t_1 = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}t_1 = \frac{4}{5}t_1 = 4T_0 \quad \rightarrow \quad t_1 = 5T_0\,,$$

la posizione dell'astronave quando inverte il senso di marcia sarà

$$\bar{x} = v_1 t_1 = 3cT_0\,.$$

Nel viaggio di ritorno l'astronave impiega un tempo coordinato

$$t_2 - t_1 = \frac{\bar{x}}{v_2} = 6T_0$$

e un tempo proprio

$$\tau_2 - \tau_1 = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}(t_2 - t_1) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}6T_0 = 3\sqrt{3}T_0\,,$$

quindi

$$t_2 = 6T_0 + 5T_0 = 11T_0\,, \qquad \tau_2 = (3\sqrt{3} + 4)T_0\,.$$