Corso di Meccanica Statistica - Compito per l'appello straordinario del 06/11/2024
Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche classiche, di massa m, non interagenti, a contatto con un termostato a temperatura T. Le particelle sono vincolate a muoversi su un piano, sul quale è fissato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy, e possono accedere soltanto alla regione di spazio $x \geq 0$, $y \geq 0$. L'hamiltoniana di singola particella è

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + Ax + By,$$

dove $p \equiv |\vec{p}|$, $\vec{r}$ è il vettore di componenti cartesiane x, y, A e B sono parametri dimensionali strettamente positivi.

1. [4 punti] Calcolare l'entropia microcanonica del gas, $S(E, N)$.
2. [3 punti] Determinare la frazione di particelle con $x \geq \kappa_{\rm B} T/A$.
3. [3 punti] Determinare il valore medio della coordinata y di una particella.

   Assumiamo ora che le particelle siano bosoni con spin $s = 0$.

4. [4 punti] Determinare la temperatura di condensazione di Bose-Einstein T_0.
5. [3 punti] Determinare l'energia interna per particella U/N per $T \leq T_0$.
6. [3 punti] Determinare la temperatura $T_{1/2}$ alla quale la metà delle particelle è nel condensato.

   Assumiamo ora che le particelle siano fermioni con spin $s = \frac{1}{2}$ e il gas si trovi a $T = 0$.

7. [3 punti] Determinare l'energia di Fermi $\epsilon_{\rm F}$.
8. [4 punti] Calcolare il valore medio di x in funzione di $\epsilon_{\rm F}$.
9. [3 punti] Determinare la distanza massima dall'origine O di una particella in funzione di $\epsilon_{\rm F}$.

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty {\rm d}t\, t^{z-1}\, {\rm e}^{-t}$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty {\rm d}t\, \frac{t^{z-1}}{{\rm e}^t - 1}$.

Risoluzione

particelle classiche

1. La funzione di partizione di una particella nell'ensemble canonico si scrive

$$Z_1 = \frac{1}{h^2}\int \mathrm{d}^2\vec{r}\int \mathrm{d}^2\vec{p}\,\mathrm{e}^{-\beta H} = \frac{2\pi}{h^2}\int_0^\infty \mathrm{d}p\,p\,\mathrm{e}^{-\beta p^2/2m}\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\beta A x}\int_0^\infty \mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\beta B y}$$
$$= \frac{2\pi m}{h^2 AB\beta^3} = \frac{2\pi m}{h^2 AB}(\kappa_\mathrm{B}T)^3$$

e l'energia libera è

$$F = -\kappa_\mathrm{B}T\ln\left(\frac{Z_1^N}{N!}\right) \approx -N\kappa_\mathrm{B}T\ln\left(\frac{\mathrm{e}Z_1}{N}\right) = -N\kappa_\mathrm{B}T\ln\left[\frac{2\pi\mathrm{e}m}{h^2ABN}(\kappa_\mathrm{B}T)^3\right].$$

L'entropia canonica è

$$S(T,N) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_N = N\kappa_\mathrm{B}\ln\left[\frac{2\pi\mathrm{e}m}{h^2ABN}(\kappa_\mathrm{B}T)^3\right] + 3N\kappa_\mathrm{B} = -\frac{F}{T}+\frac{U}{T},$$

da cui risulta immediatamente $U = 3N\kappa_\mathrm{B}T$. Nel microcanonico, l'energia interna U è l'energia E del sistema isolato, per cui $T = E/3N\kappa_\mathrm{B}$ e

$$S(E,N) = N\kappa_\mathrm{B}\ln\left[\frac{2\pi m}{h^2ABN}\left(\frac{E}{3N}\right)^3\right] + 4N\kappa_\mathrm{B}.$$

2. La densità di probabilità per la distribuzione della coordinata x è

$$\mathcal{P}(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta A x}}{\int_0^\infty \mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\beta A x}} = \frac{A}{\kappa_\mathrm{B}T}\,\mathrm{e}^{-\beta A x}.$$

Detto $N_\geq$ il numero di particelle con $x \geq \kappa_\mathrm{B}T/A$, si ha

$$\frac{N_\geq}{N} = \int_{\kappa_\mathrm{B}T/A}^\infty \mathrm{d}x\,\mathcal{P}(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} \approx 0.368.$$

3. Analogamente, la densità di probabilità per la distribuzione della coordinata y è

$$\widetilde{\mathcal{P}}(y) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta B y}}{\int_0^\infty \mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\beta B y}} = \frac{B}{\kappa_\mathrm{B}T}\,\mathrm{e}^{-\beta B y}.$$

Allora

$$\langle y\rangle = \int_0^\infty \mathrm{d}y\,y\,\widetilde{\mathcal{P}}(y) = \frac{\kappa_\mathrm{B}T}{B}.$$

Bosoni

Calcoliamo la densità degli stati

$$g(\epsilon) = \frac{g_s}{h^2}\int \mathrm{d}^2\vec{r}\int \mathrm{d}^2\vec{p}\,\delta(\epsilon - H) = \frac{2\pi g_s}{h^2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\int_0^\infty \mathrm{d}y\int_0^\infty \mathrm{d}p\,p\,\delta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m} - Ax - By\right),$$

dove g_s è la degenerazione di spin. Svolgendo dapprima l'integrale in p abbiamo

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi g_s m}{h^2}\int_0^\infty \mathrm{d}x\int_0^\infty \mathrm{d}y\,\theta\left(\epsilon - Ax - By\right).$$

Integrando ora rispetto a y, otteniamo

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi g_s m}{h^2 B}\int_0^\infty \mathrm{d}x\ (\epsilon - Ax)\ \theta\left(\epsilon - Ax\right) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}x\,\tilde{g}(\epsilon, x),$$

dove è definita la densità degli stati congiunta $\tilde{g}(\epsilon, x)$, che ci servirà in seguito. Integrando rispetto a x, si trova infine

$$g(\epsilon) = \frac{\pi g_s m}{h^2 AB}\,\epsilon^2\,\theta(\epsilon),$$

da cui è evidente che l'energia minima di una particella è $\epsilon_{\min} = 0$.

4. Per i bosoni, $g_s = 1$. Alla temperatura di condensazione si ha

$$N = \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta_0\epsilon} - 1}\mathrm{d}\epsilon,$$

dove $\beta_0 = 1/\kappa_\mathrm{B}T_0$. Passando alla variabile adimensionale $\xi = \beta_0\epsilon$, troviamo

$$N = \frac{\pi m}{h^2 AB}(\kappa_\mathrm{B}T_0)^3\int_0^\infty \frac{\xi^2}{\mathrm{e}^\xi - 1}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi m}{h^2 AB}\,\Gamma(3)\zeta(3)\,(\kappa_\mathrm{B}T_0)^3,$$

da cui

$$\kappa_\mathrm{B}T_0 = \left[\frac{h^2 ABN}{\pi m\,\Gamma(3)\zeta(3)}\right]^{1/3}.$$

5. Per $T \le T_0$ abbiamo

$$\frac{U}{N} = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^\infty \frac{\epsilon\,g(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon} - 1}\mathrm{d}\epsilon = \frac{\pi m}{h^2 ABN}(\kappa_\mathrm{B}T)^4\int_0^\infty \frac{\xi^3}{\mathrm{e}^\xi - 1}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi m}{h^2 ABN}\,\Gamma(4)\zeta(4)\,(\kappa_\mathrm{B}T)^4$$

6. Per $T \le T_0$, detto $N_>$ il numero di particelle fuori condensato, abbiamo

$$N_> = \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon} - 1}\mathrm{d}\epsilon = \frac{\pi m}{h^2 AB}(\kappa_\mathrm{B}T)^3\int_0^\infty \frac{\xi^2}{\mathrm{e}^\xi - 1}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\pi m}{h^2 AB}\,\Gamma(3)\zeta(3)\,(\kappa_\mathrm{B}T)^3 = N\left(\frac{T}{T_0}\right)^3.$$

Allora, $T_{1/2} = T_0/2^{1/3} \approx 0.794\,T_0$.

Fermioni

Nel caso dei fermioni, $g_s = 2$.

7. Abbiamo

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} g(\epsilon)\, \mathrm{d}\epsilon = \frac{2\pi m}{3h^2 AB}\, \epsilon_{\mathrm{F}}^3\, \theta(\epsilon_{\mathrm{F}}),$$

da cui

$$\epsilon_{\mathrm{F}} = \left(\frac{3h^2 ABN}{2\pi m} \right)^{1/3}.$$

8. Il valore medio cercato è

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon \int_0^{\infty} \mathrm{d}x\, x\, \tilde{g}(\epsilon, x) = \frac{2\pi m}{3h^2 A^2 BN} \int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon\, \epsilon^3 = \frac{\pi m}{6h^2 A^2 BN}\, \epsilon_{\mathrm{F}}^4 = \frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{4A},$$

con $\epsilon_{\mathrm{F}} \geq 0$.

9. Sulla superficie di Fermi

$$\epsilon_{\mathrm{F}} = \frac{p^2}{2m} + Ax + By.$$

Il valore massimo per la somma $Ax + By$ si ha per $p = 0$, per cui $(Ax + By)_{\mathrm{max}} = \epsilon_{\mathrm{F}}$. Questa è l'equazione di una retta che interseca gli assi cartesiani nei punti $(\epsilon_{\mathrm{F}}/A, 0)$ e $(0, \epsilon_{\mathrm{F}}/B)$. La distanza massima di una particella dall'origine è quindi

$$d_{\mathrm{max}} = \frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{\min{(A, B)}}.$$