Corso di Meccanica Statistica
Compito del 7/9/2022
Proff. S. Caprara, I. Giardina e M. Grilli

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, che si muovono sul piano xy, con Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{p^2}{2m} + \gamma r^4,$$

dove $p \equiv |\boldsymbol{p}|$, $r \equiv |\boldsymbol{q}|$ e $\gamma > 0$ è un parametro dimensionale. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:

1.a) determinare l'energia interna del gas U [4 punti];
1.b) determinare la probabilità $\mathcal{P}$ che l'energia cinetica di una particella sia minore di $\kappa_{\rm B} T$ [3 punti];
1.c) determinare la distanza media $\overline{r}$ di una particella dall'origine delle coordinate, in funzione della temperatura T del gas [3 punti].

2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:

2.a) dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e calcolare la temperatura di condensazione T_0 [6 punti];
2.b) calcolare la frazione media di particelle che si trovano nello stato fondamentale a $T = \frac{1}{9} T_0$ [4 punti].

3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin $\frac{1}{2}$ e si trovi a $T = 0$:

3.a) determinare l'energia di Fermi $\varepsilon_{\rm F}$ del gas in funzione del numero N di particelle [4 punti];
3.b) determinare la distanza media $\overline{r}$ di una particella dall'origine delle coordinate, in funzione dell'energia di Fermi $\varepsilon_{\rm F}$ [6 punti].

• Si ricordi che $\xi(\frac{3}{2}) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}z\, z^{1/2}\, (\mathrm{e}^z - 1)^{-1} = \Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.315$. Valori utili della funzione Gamma di Eulero: $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 3.626$, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \approx 1.772$, $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \pi\sqrt{2}/\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \approx 1.225$.

Risposte

1.a) L'energia interna può essere calcolata a partire dall'energia libera F mediante la relazione $U = \left.\frac{\partial \beta F}{\partial \beta}\right|_{V,N}$, con $\beta \equiv (\kappa_{\rm B} T)^{-1}$.

Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z_N = Z_1^N/N! \approx (Z_1 {\rm e}/N)^N$ dove Z_1 è la funzione di partizione di singola particella. Quindi $F = -\kappa_{\rm B} T \ln Z_N = -\kappa_{\rm B} T N \ln(Z_1 {\rm e}/N)$. Inoltre

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int \frac{{\rm d}^2\boldsymbol{p}\,{\rm d}^2\boldsymbol{q}}{h^2}\,{\rm e}^{-\beta H(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \frac{\pi^2}{h^2}\frac{2m}{\beta}\frac{1}{\sqrt{\gamma\beta}}\int_0^\infty {\rm d}\eta\,{\rm e}^{-\eta}\int_0^\infty {\rm d}\nu\,{\rm e}^{-\nu^2} \\ &= \frac{\pi^2}{h^2}\frac{2m}{\beta}\frac{1}{\sqrt{\gamma\beta}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\pi^{5/2} m}{h^2\gamma^{1/2}\beta^{3/2}}, \end{aligned}$$

dove si è posto $\eta \equiv \beta p^2/(2m)$ e $\nu \equiv \sqrt{\beta\gamma}\,r^2$. Quindi, siccome

$$U = \left.\frac{\partial \beta F}{\partial \beta}\right|_{V,N} = -\frac{N}{Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial \beta},$$

usando l'espressione di Z_1, si ottiene

$$U = \frac{3}{2} N \kappa_{\rm B} T.$$

1.b) La probabilità che l'energia cinetica di una particella sia minore di $\kappa_{\rm B} T$ equivale alla probabilità che il modulo dell'impulso di una particella sia minore di $\sqrt{2m\kappa_{\rm B} T}$. Quindi, la probabilità cercata vale

$$\mathcal{P} = \frac{\int_0^{2m\kappa_{\rm B} T} {\rm d}p^2\,{\rm e}^{-\beta p^2/(2m)}}{\int_0^\infty {\rm d}p^2\,{\rm e}^{-\beta p^2/(2m)}} = \frac{\int_0^1 {\rm d}\eta\,{\rm e}^{-\eta}}{\int_0^\infty {\rm d}\eta\,{\rm e}^{-\eta}} = 1 - {\rm e}^{-1} \approx 0.63,$$

dove si è nuovamente posto $\eta \equiv \beta p^2/(2m)$.

1.c) La distanza media cercata vale

$$\overline{r} = \frac{\int_0^\infty {\rm d}r\,r^2\,{\rm e}^{-\beta\gamma r^4}}{\int_0^\infty {\rm d}r\,r\,{\rm e}^{-\beta\gamma r^4}} = \frac{\int_0^\infty {\rm d}\zeta\,\zeta^{-1/4}\,{\rm e}^{-\zeta}}{\int_0^\infty {\rm d}\zeta\,\zeta^{-1/2}\,{\rm e}^{-\zeta}}\,(\beta\gamma)^{1/4} = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,(\beta\gamma)^{-1/4} \approx 0.69\left(\frac{\kappa_{\rm B} T}{\gamma}\right)^{1/4},$$

dove si è posto $\zeta \equiv \beta\gamma r^4$.

2.a) Se il sistema è composto da Bosoni, il numero medio di particelle a temperatura T è pari a $N = N_0 + \widetilde{N}$, dove N_0 è il numero medio di particelle nello stato condensato e $\widetilde{N}$ è il numero medio di particelle fuori dal condensato, dato da

$$\widetilde{N} = \int_{\varepsilon_{\min}}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{G(\varepsilon)}{\mathrm{e}^{\beta(\varepsilon-\mu)} - 1},$$

dove $G(\varepsilon)$ è la densità degli stati, $\mu \leq \varepsilon_{\min}$ (l'uguaglianza ha luogo in presenza del condensato) e $\varepsilon_{\min}$ è il valore minimo dell'energia di una particella. Nel caso in esame, $\varepsilon_{\min} = 0$. La condizione affinché esista la condensazione a $T = T_0$ è che

$$N = \int_{\varepsilon_{\min}}^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{G(\varepsilon)}{\mathrm{e}^{\beta_0(\varepsilon-\varepsilon_{\min})} - 1} < \infty,$$

dove $\beta_0 \equiv (\kappa_{\mathrm{B}} T_0)^{-1}$ e la densità degli stati è data da

$$G(\varepsilon) = \int \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}\, \mathrm{d}^2\boldsymbol{q}}{h^2} \, \delta\left[H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) - \varepsilon\right] =$$

$$\frac{\pi^2}{h^2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r^2 \int_0^{\infty} \mathrm{d}p^2 \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \gamma r^4 - \varepsilon\right) =$$

$$\frac{2\pi^2 m}{h^2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}r^2 \, \theta(\varepsilon - \gamma r^4) = \frac{2\pi^2 m}{h^2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}} \, \theta(\varepsilon).$$

Di conseguenza, la condizione di condensazione diventa

$$N = \frac{2\pi^2 m}{h^2\sqrt{\gamma}} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\varepsilon \, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\mathrm{e}^{\beta_0\varepsilon} - 1} = \frac{2\pi^2 m \, \xi(\frac{3}{2})}{h^2\sqrt{\gamma}} (\kappa_{\mathrm{B}} T_0)^{3/2} < \infty,$$

dove $\xi(\frac{3}{2}) \equiv \int_0^{\infty} \mathrm{d}z \, z^{1/2} \, (\mathrm{e}^z - 1)^{-1} = \Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.315$. Quindi, esiste la condensazione e

$$T_0 = \frac{1}{\kappa_{\mathrm{B}}} \left[\frac{h^2\sqrt{\gamma} N}{2\pi^2 m \, \xi(\frac{3}{2})}\right]^{2/3}.$$

2.b) Dal punto precedente si ottiene che, per $T < T_0$,

$$N_0(T) = N - \widetilde{N}(\mu = 0, T) = N - \frac{2\pi^2 m \, \xi(\frac{3}{2})}{h^2\sqrt{\gamma}} (\kappa_{\mathrm{B}} T)^{3/2} = N \left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right],$$

per cui

$$\frac{N_0(T = \frac{1}{9} T_0)}{N} = 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27} \approx 0.96.$$

3.a) L'energia del sistema non dipende dal valore dello spin delle particelle, quindi il numero totale di particelle è

$$N = 2 \int_0^{\varepsilon_{\rm F}} {\rm d}\varepsilon \, G(\varepsilon) = \frac{4\pi^2 m}{h^2 \sqrt{\gamma}} \int_0^{\varepsilon_{\rm F}} {\rm d}\varepsilon \, \sqrt{\varepsilon} = \frac{8\pi^2 m}{3h^2 \sqrt{\gamma}} \varepsilon_{\rm F}^{3/2},$$

con $\varepsilon_{\rm F} \geq \varepsilon_{\min} = 0$. Invertendo, otteniamo il risultato richiesto,

$$\varepsilon_{\rm F} = \left(\frac{3h^2 \sqrt{\gamma} N}{8\pi^2 m} \right)^{2/3} .$$

3.b) Per determinare $\overline{r}$, occorre calcolare la distribuzione

$$G(\varepsilon, r) = \frac{2\pi^2 r}{h^2} \int_0^\infty {\rm d}p^2 \delta \left(\frac{p^2}{2m} + \gamma r^4 - \varepsilon \right) = \frac{4\pi^2 m r}{h^2} \theta(\varepsilon - \gamma r^4),$$

tale che $\int_0^{\varepsilon_{\rm F}} {\rm d}\varepsilon \int_0^\infty {\rm d}r \, G(\varepsilon, r) = \frac{1}{2} N$ (il fattore $\frac{1}{2}$ tiene conto della degenerazione di spin). Allora,

$$\overline{r} = \frac{2}{N} \int_0^{\varepsilon_{\rm F}} {\rm d}\varepsilon \int_0^\infty {\rm d}r \, r \, G(\varepsilon, r) = \frac{8\pi^2 m}{h^2 N} \int_0^\infty {\rm d}r \, r^2 \left(\varepsilon_{\rm F} - \gamma r^4 \right) \theta \left(\varepsilon_{\rm F} - \gamma r^4 \right) .$$

Sostituendo l'espressione di N in funzione di $\varepsilon_{\rm F}$, si ottiene

$$\overline{r} = \frac{3\sqrt{\gamma}}{\varepsilon_{\rm F}^{3/2}} \int_0^{(\varepsilon_{\rm F}/\gamma)^{1/4}} {\rm d}r \, r^2 \left(\varepsilon_{\rm F} - \gamma r^4 \right) = \frac{4}{7} \left(\frac{\varepsilon_{\rm F}}{\gamma} \right)^{1/4} \approx 0.57 \left(\frac{\varepsilon_{\rm F}}{\gamma} \right)^{1/4} .$$