

Corso di Meccanica Statistica - Compito del 7/9/2026
Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche di massa m , non interagenti, confinate nella regione cilindrica di spazio $0 \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq R$, $0 \leq x < \infty$, con Hamiltoniana di singola particella data da

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + Ax,$$

dove $p \equiv |\vec{p}|$, $\vec{r}$ è il vettore di componenti cartesiane x, y, z , nel sistema di riferimento assegnato, e A è un parametro dimensionale strettamente positivo. Il sistema è in equilibrio a temperatura T .

Particella classiche:

1. [3 punti] Quale è la variazione di energia libera del sistema quando vengono aggiunte 10 particelle al gas? (Si assuma $N \gg 10$).
2. [4 punti] Se la parete circolare a $x = 0$ fosse mobile, che forza occorrerebbe applicare su di essa per mantenerla fissa nella posizione originaria?

Particelle quantistiche di spin $S = 0$.

3. [3 punti] Determinare la temperatura di condensazione T_0 .
4. [4 punti] Determinare la temperatura alla quale il 90% delle particelle si trova nel condensato, in funzione di T_0 .

Particelle quantistiche di spin $S = \frac{1}{2}$. Assumendo che il sistema si trovi a $T = 0$:

5. [3 punti] Determinare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione del numero di particelle N .
6. [5 punti] Determinare il valore medio $\langle x \rangle$ in funzione di ϵ_F .

Sistemi magnetici

Si consideri un sistema di N spin indipendenti in presenza di un campo magnetico esterno h , con Hamiltoniana $\mathcal{H}(\{s_i\}) = -h \sum_{i=1}^N s_i$. Le variabili di spin assumono i valori $s_i = \pm 1$.

7. [3 punti] Calcolare la magnetizzazione del sistema $m = \frac{1}{N} \sum_i \langle s_i \rangle$ in funzione del campo magnetico.
8. [5 punti] Calcolare l'entropia del sistema in funzione del campo magnetico e della temperatura. Calcolare i limiti per $T \rightarrow 0$ e $T \rightarrow \infty$.

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$; $\zeta(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$.

Risoluzione

Particelle classiche

1. Posto $\beta \equiv (\kappa_B T)^{-1}$, la funzione di partizione di una particella è

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int d^3\vec{p} d^3\vec{r} e^{-\beta \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r})} = \frac{1}{h^3} \int_0^\infty d^3\vec{p} e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \pi R^2 \int_0^\infty dx e^{-\beta A x},$$

dove nell'integrale su $\vec{r}$ si sono adottate coordinate cilindriche e l'area della base del cilindro (parete circolare localizzata a $x = 0$) è banalmente πR^2 . Gli integrali sono elementari e si trova

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} Z_p \quad Z_r = \frac{1}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \frac{\pi R^2}{\beta A}$$

Nell'espressione appena ricavata, notiamo il contributo relativo all'integrazione delle componenti spaziali, $Z_r = \frac{\pi R^2}{\beta A}$, che sarà utile in futuro.

2. La variazione di energia libera di Helmholtz $\delta \mathcal{A}$ quando vengono aggiunte $\delta N = 10$ particelle è data da

$$\delta \mathcal{A} = \left. \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial N} \right|_{T, V} \delta N = \mu \delta N,$$

dove μ è il potenziale chimico. Ricordando l'espressione ricavata nel caso di gas perfetti,

$$\frac{Z_1}{N} = e^{-\beta \mu} \quad \rightarrow \quad \mu = -\frac{1}{\beta} \ln \left(\frac{Z_1}{N} \right)$$

ricaviamo subito

$$\delta \mathcal{A} = -\frac{10}{\beta} \ln \left[\frac{(2\pi m)^{3/2} \pi R^2}{N h^3 \beta^{5/2} A} \right]$$

3. Il gas esercita una pressione sulla parete circolare a $x = 0$. Se tale parete fosse mobile, tale pressione determinerebbe una forza lungo la direzione x volta a fare espandere il volume occupato dal gas. Per fare rimanere la parete fissa, occorre dunque esercitare dall'esterno una forza opposta di eguale intensità, ovvero:

$$F = \mathcal{P}(x=0) \pi R^2,$$

dove $\mathcal{P}(x=0)$ è la pressione del gas sulla parete, e πR^2 l'area della parete stessa.

Per calcolare la pressione, consideriamo un piccolo volumetto cilindrico con asse lungo la direzione x , avente come base la parete a $x = 0$ e di altezza infinitesima dx . Poichè l'energia potenziale dipende unicamente dalla coordinata x , essa è costante all'interno del volumetto considerato. Possiamo dunque applicare la legge dei gas perfetti

$$\mathcal{P}(x=0) \delta V = \delta N \kappa_B T,$$

dove $\delta V = \pi R^2 dx$ è il volume del cilindretto, e δN il numero medio di particelle in esso contenute. Quest'ultima quantità può essere calcolarla partendo dalla distribuzione di probabilità spaziale di singola particella:

$$\delta N = N \int_{\delta V} d\vec{r} P(\vec{r}) = N \pi R^2 dx \left. \frac{e^{-\beta A x}}{Z_r} \right|_{x=0} = N \beta A dx .$$

Avremo dunque,

$$\mathcal{P}(x=0) = \frac{\delta N}{\delta V} \kappa_B T = \rho(x=0) \kappa_B T = \frac{N \beta A dx}{\pi R^2 dx} \kappa_B T = \frac{N A}{\pi R^2}$$

e, infine,

$$F = \mathcal{P}(x=0) \pi R^2 = N A$$

Bosoni

4. Calcoliamo per iniziare la densità degli stati (con degenerazione di spin $g_s = 1$)

$$\begin{aligned}
 G(\epsilon) &= g_s \frac{1}{h^3} \int d\vec{r} d\vec{p} \delta[\epsilon - \mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r})] = \frac{4\pi^2 R^2 g_s}{h^3} \int_0^\infty dx \int_0^\infty dp p^2 \delta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m} - Ax\right), \\
 &= \frac{4\pi^2 R^2 g_s m \sqrt{2m}}{h^3} \int_0^\infty dt t^{1/2} \delta(t - (\epsilon - Ax)) \\
 &= \frac{4\pi^2 R^2 g_s m \sqrt{2m}}{h^3} \int_0^\infty dx (\epsilon - Ax)^{1/2} \theta(\epsilon - Ax) \equiv \int_0^\infty dx G(\epsilon, x) = \\
 &= \frac{4\pi^2 R^2 g_s m \sqrt{2m}}{h^3} \theta(\epsilon) \int_0^{\frac{\epsilon}{A}} dx (\epsilon - Ax)^{1/2} = \frac{8\pi^2 R^2 g_s m \sqrt{2m}}{3h^3 A} \epsilon^{3/2} \theta(\epsilon) = C \epsilon^{3/2} \theta(\epsilon)
 \end{aligned}$$

dove C è una costante dimensionale positiva. Nella terza linea della derivazione, abbiamo introdotto la densità degli stati di particella singola a energia e x fissate, $G(\epsilon, x)$, che sarà utile nei calcoli futuri.

Dalla forma della $G(\epsilon)$ è evidente che l'energia minima di una particella è $\epsilon_{\min} = 0$. Per trovare la temperatura di condensazione T_0 , ponendo $\beta_0 \equiv (\kappa_B T_0)^{-1}$, scriviamo

$$N = \int \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = C \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{C}{\beta_0^{5/2}} \int_0^\infty \frac{t^{3/2}}{e^t - 1} dt = C (\kappa_B T_0)^{5/2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right).$$

Ricordando che nel caso dei Bosoni di spin $S = 0$ si ha che $g_s = 1$, si trova

$$T_0 = \frac{1}{\kappa_B} \left[\frac{N}{C \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \right]^{2/5} = \frac{1}{\kappa_B} \left[\frac{3Ah^3 N}{8\pi^2 R^2 \sqrt{2m}^{3/2} \zeta\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \right]^{2/5}$$

5. Per $T < T_0$, le particelle si distribuiscono in parte dentro e in parte fuori dal condensato, ossia

$$N = N_0 + N_{>} \quad \rightarrow \quad \frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_{>}}{N}$$

La temperatura $\tilde{T}$ a cui il 90% particelle si trova nel condensato corrisponde dunque alla temperatura per cui le particelle fuori dal condensato sono il 10% del totale.

Per $T < T_0$, il potenziale chimico resta fisso al valore dell'energia minima (nel nostro caso, $\epsilon_{\min} = 0$). Il numero di particelle fuori dal condensato è dunque (utilizzando l'espressione per N trovata al punto precedente)

$$N_{>} = \int_0^\infty \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{C}{\beta^{5/2}} \int_0^\infty \frac{t^{3/2}}{e^t - 1} dt = N \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2}.$$

Dunque,

$$\frac{N_{>}}{N} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\tilde{T}}{T_0} \right)^{5/2} = 0.1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{T} = (0.1)^{2/5} T_0 \simeq 0.40 T_0$$

Fermioni

6. In questo caso $g_s = 2$, quindi, invertendo la relazione

$$N = C \int_0^{\epsilon_F} G(\epsilon) d\epsilon = C \theta(\epsilon_F) \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{32\pi^2 R^2 m \sqrt{2m}}{15h^3 A} \epsilon_F^{5/2} \theta(\epsilon_F)$$

si ha (per $\epsilon_F \geq 0$)

$$\epsilon_F = \left[\frac{15h^3 AN}{32\pi^2 R^2 m \sqrt{2m}} \right]^{2/5}.$$

7. La densità degli stati congiunta che serve per rispondere alla domanda posta è, come evidenziato al punto 4.,

$$G(\epsilon, x) = \frac{4\pi^2 R^2 g_s m \sqrt{2m}}{h^3} (\epsilon - Ax)^{1/2} \theta(\epsilon - Ax)$$

Il valore medio cercato è

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \int_0^\infty dx x G(\epsilon, x) = \frac{4\pi^2 R^2 g_s m \sqrt{2m}}{N h^3} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \int_0^\infty dx x (\epsilon - Ax)^{1/2} \theta(\epsilon - Ax) \\ &= \frac{4\pi^2 R^2 g_s m \sqrt{2m}}{N h^3 A^2} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \int_{-\infty}^\epsilon dt t^{1/2} (\epsilon - t) \theta(t) = \frac{64\pi^2 R^2 m \sqrt{2m}}{105 N h^3 A^2} \epsilon_F^{7/2}. \end{aligned}$$

Sostituendo il valore di N in funzione di ϵ_F trovato al punto precedente si ottiene infine

$$\langle x \rangle = \frac{2}{7} \frac{\epsilon_F}{A}$$

Sistemi magnetici

8. Poiché gli spin sono indipendenti, ogni spin è distribuito indipendentemente dagli altri secondo la probabilità

$$P(s_i) = \frac{1}{Z_1} e^{\beta h s_i},$$

dove la funzione di partizione di singolo spin Z_1 è data da

$$Z_1 = \sum_{s_i=\pm 1} e^{\beta h s_i} = 2 \cosh(\beta h) .$$

Il valore medio dello spin è

$$\langle s_i \rangle = \frac{1}{Z_1} \sum_{s_i=\pm 1} e^{\beta h s_i} s_i = \tanh(\beta h) ,$$

e la magnetizzazione per sito è dunque data da

$$m = \tanh(\beta h)$$

9. Per calcolare l'entropia del sistema $S = (U - \mathcal{A})/T$ occorre calcolare l'energia interna U e l'energia libera $\mathcal{A}$. Avremo,

$$U = \langle \mathcal{H}(\{s_i\}) \rangle = -h \sum_{i=1}^N \langle s_i \rangle = -h N m = -h N \tanh(\beta h)$$

Per calcolare l'energia libera, consideriamo la funzione di partizione totale del sistema,

$$Z = Z_1^N = [2 \cosh(\beta h)]^N ,$$

da cui otteniamo

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{\beta} \ln Z = -\frac{N}{\beta} \ln [2 \cosh(\beta h)]$$

e, infine,

$$S(T, h) = N \kappa_B (-\beta h \tanh(\beta h) + \ln [2 \cosh(\beta h)]) .$$

I limiti a bassa e alta temperatura sono semplici da calcolare. Ad alta temperatura, domina il secondo contributo e avremo

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S(T, h) = N \kappa_B \ln 2$$

poiché ogni singolo spin ha eguale probabilità di assumere ognuno dei due valori possibili. Per bassa temperatura, considerando che $2 \cosh(\beta h) \sim e^{\beta h}$, avremo

$$\lim_{T \rightarrow 0} S(T, h) = \lim_{T \rightarrow 0} N \kappa_B (-\beta h + \beta h) = 0 .$$

Infatti a $T = 0$ solo una configurazione (quella con tutti gli spin orientati nella direzione del campo) ha peso diverso da zero.