Corso di Meccanica Statistica - Compito del 9/7/2024
Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche, non interagenti, confinate nella regione di spazio $0 \leq z \leq L$, con hamiltoniana di singola particella.

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = cp + \gamma(x^2 + y^2),$$

dove $p \equiv |\vec{p}|$, $\vec{r}$ è il vettore di componenti cartesiane x, y, z, nel sistema di riferimento assegnato, c e γ sono parametri dimensionali strettamente positivi. Il sistema è in equilibrio a temperatura T.

Nel caso di particella classiche:

1. [3 punti] Determinare l'energia interna per particella u.
2. [3 punti] Determinare la temperatura T_R alla quale la metà delle particelle si trova nella regione di spazio $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$.
3. [4 punti] Determinare la variazione di entropia per particella, Δs, se, alla temperatura T_R trovata al punto precedente, tutto il gas viene compresso fino ad essere confinato nella regione di spazio $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$.

Nel caso di particelle quantistiche di spin $S = 0$:

4. [3 punti] Determinare la temperatura di condensazione T_0.
5. [4 punti] Determinare l'energia interna per particella, u, alla temperatura $T = \frac{1}{2}T_0$, in funzione di T_0.
6. [3 punti] Determinare la temperatura $T_{1/2}$ alla quale la metà delle particelle si trova nel condensato, in funzione di T_0.

Nel caso di particelle quantistiche di spin $S = \frac{1}{2}$, assumendo che il sistema si trovi a $T = 0$:

7. [3 punti] Determinare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione del numero di particelle N.
8. [4 punti] Determinare il valore medio di p in funzione di ϵ_F.
9. [3 punti] Fissato $R > 0$, determinare il numero di particelle N_R tale che per $N > N_R$ compaiono nel sistema particelle la cui distanza dall'asse z è $\rho \equiv \sqrt{x^2 + y^2} > R$.

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}$; $\zeta(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}$.
Valori utili: $\Gamma(4) = 6$, $\Gamma(5) = 24$, $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90} \approx 1.0823$, $\zeta(5) \approx 1.0369$.

Risoluzione

Particelle classiche

1. Posto $\beta \equiv (\kappa_B T)^{-1}$, la funzione di partizione di una particella è

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int \mathrm{d}^3\vec{p}\, \mathrm{d}^3\vec{r}\, \mathrm{e}^{-\beta \mathcal{H}(\vec{p},\vec{r})} = \frac{4\pi^2 L}{h^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2\, \mathrm{e}^{-\beta c p} \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\beta\gamma s},$$

dove nell'integrale su $\vec{r}$ si sono adottate coordinate cilindriche e si è fatto il cambio di variabile $s \equiv x^2 + y^2$. Gli integrali sono elementari e si trova

$$Z_1 = \frac{8\pi^2 L}{h^3 c^3 \gamma \beta^4} = \frac{8\pi^2 L}{h^3 c^3 \gamma} \left(\kappa_B T\right)^4,$$

e $Z = Z_1^N / N! \approx (\mathrm{e} Z_1/N)^N$.
L'energia libera di Helmoltz è

$$F = -\kappa_B T \ln Z = N \kappa_B T \ln \frac{h^3 c^3 \gamma N}{8\pi^2 \mathrm{e} L \left(\kappa_B T\right)^4}.$$

L'energia interna per particella è

$$u = \frac{1}{N} \frac{\partial \beta F}{\partial \beta} = 4 \kappa_B T.$$

2. Posto $\beta_R \equiv (\kappa_B T_R)^{-1}$, la condizione per determinare T_R è

$$\frac{\displaystyle\int_0^{R^2} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\beta_R \gamma s}}{\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{d}s\, \mathrm{e}^{-\beta_R \gamma s}} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \mathrm{e}^{-\beta_R \gamma R^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \kappa_B T_R = \frac{\gamma R^2}{\ln 2} \approx 1.433\, \gamma R^2.$$

3. La variazione di energia libera è

$$\Delta F = -N \kappa_B T \ln \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta \gamma R^2}\right),$$

quindi

$$\Delta s = -\frac{1}{N} \frac{\partial \Delta F}{\partial T} = \kappa_B \ln \left(1 - \mathrm{e}^{-\beta\gamma R^2}\right) - \frac{\kappa_B T\, \mathrm{e}^{-\beta\gamma R^2}}{1 - \mathrm{e}^{-\beta\gamma R^2}} \frac{\gamma R^2}{\kappa_B T^2}.$$

Posto $T = T_R$ e usando l'espressione per T_R trovata al punto precedente, si trova

$$\Delta s = -\kappa_B \ln 4.$$

Bosoni

4. Calcoliamo per iniziare la densità degli stati (con degenerazione di spin $g_s = 1$)

$$G(\epsilon) = g_s \frac{1}{h^3} \int \mathrm{d}\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{p}\delta\left[\epsilon - \mathcal{H}(\vec{p},\vec{r})\right] = \frac{4\pi^2 g_s L}{h^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2 \int_0^\infty \mathrm{d}s\, \delta(\epsilon - cp - \gamma s),$$

dove si è nuovamente posto $s = x^2 + y^2$. Si trova quindi

$$G(\epsilon) = \frac{4\pi^2 g_s L}{3h^3 c^3 \gamma}\, \epsilon^3\, \theta(\epsilon),$$

da cui è evidente che l'energia minima di una particella è $\epsilon_{\min} = 0$. Per trovare la temperatura di condensazione T_0, ponendo $\beta_0 \equiv (\kappa_B T_0)^{-1}$, scriviamo

$$N = \int \frac{G(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta_0 \epsilon} - 1}\, \mathrm{d}\epsilon = \frac{4\pi^2 g_s L\, (\kappa_B T_0)^4}{3h^3 c^3 \gamma} \int_0^\infty \frac{z^3}{\mathrm{e}^z - 1}\, \mathrm{d}z.$$

L'integrale vale $\zeta(4)\Gamma(4)$, ricordando che nel caso dei Bosoni di spin $S = 0$ si ha che $g_s = 1$, si trova

$$\kappa_B T_0 = \left[\frac{3h^3 c^3 \gamma N}{4\pi^2 L \zeta(4)\Gamma(4)}\right]^{1/4} \approx 0.329 \left(\frac{h^3 c^3 \gamma N}{L}\right)^{1/4}.$$

5. Le particelle nel condensato hanno energia nulla, quindi, per $T < T_0$, si ha

$$u = \frac{1}{N} \int_0^\infty \frac{\epsilon\, G(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon} - 1}\, \mathrm{d}\epsilon = \frac{4\pi^2 g_s L\, (\kappa_B T)^5}{3h^3 c^3 \gamma N} \int_0^\infty \frac{z^4}{\mathrm{e}^z - 1}\, \mathrm{d}z.$$

Ricordando l'espressione di N in funzione di T_0 e osservando che l'integrale vale $\zeta(5)\Gamma(5)$, per $T < T_0$, troviamo

$$u = \frac{\zeta(5)\Gamma(5)}{\zeta(4)\Gamma(4)} \frac{\kappa_B T^5}{T_0^4}.$$

Sostituendo $T = \frac{1}{2}T_0$, si trova

$$u = \frac{\zeta(5)}{8\zeta(4)} \kappa_B T_0 \approx 0.1198\, \kappa_B T_0.$$

6. Per $T < T_0$, il numero di particelle fuori dal condensato è

$$N_> = \int_0^\infty \frac{G(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon} - 1}\, \mathrm{d}\epsilon = \frac{4\pi^2 g_s L\, (\kappa_B T)^4}{3h^3 c^3 \gamma} \int_0^\infty \frac{z^3}{\mathrm{e}^z - 1}\, \mathrm{d}z = N \left(\frac{T}{T_0}\right)^4.$$

Allora,

$$\left(\frac{T_{1/2}}{T_0}\right)^4 = \frac{N_>}{N} = \frac{N - N_0}{N} = 1 - \frac{N_0}{N} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad T_{1/2} = \frac{T_0}{2^{1/4}} \approx 0.841\, T_0.$$

Fermioni

7. In questo caso $g_s = 2$, quindi, invertendo la relazione

$$N = \frac{8\pi^2 L}{3h^3c^3\gamma}\,\theta(\epsilon_F)\int_0^{\epsilon_F}\epsilon^3\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2\pi^2 L\epsilon_F^4}{3h^3c^3\gamma}\,\theta(\epsilon_F)$$

si ha

$$\epsilon_F = \left(\frac{3h^3c^3\gamma N}{2\pi^2 L}\right)^{1/4} \approx 0.624\,\left(\frac{h^3c^3\gamma N}{L}\right)^{1/4}.$$

8. La densità degli stati congiunta che serve per rispondere alla domanda posta è

$$G(\epsilon, p) = \frac{8\pi^2 L}{h^3\gamma}\,p^2\,\theta(\epsilon - cp).$$

Il valor medio cercato è

$$\overline{p} = \frac{8\pi^2 L}{h^3\gamma N}\int_0^{\epsilon_F}\mathrm{d}\epsilon\int_0^{\infty}\mathrm{d}p\,p^3\,\theta(\epsilon - cp),$$

Ricordando la relazione tra N e l'energia di Fermi, si ha

$$\overline{p} = \frac{3}{c\epsilon_F^4}\int_0^{\epsilon_F}\mathrm{d}\epsilon\,\epsilon^4 = \frac{3\epsilon_F}{5c},$$

che equivale a $\frac{3}{5}$ del valore massimo di p a $T = 0$.

9. Fissata l'energia di Fermi ϵ_F, la distanza massima di una particella dall'asse z, $\rho_{\max}$, è tale che $\gamma\rho_{\max}^2 = \epsilon_F$. Il problema posto si risolve ponendo $\rho_{\max} = R$. Ricordando la relazione tra N e ϵ_F, troviamo

$$N_R = \frac{2\pi^2 L\gamma^3 R^8}{3h^3c^3}.$$