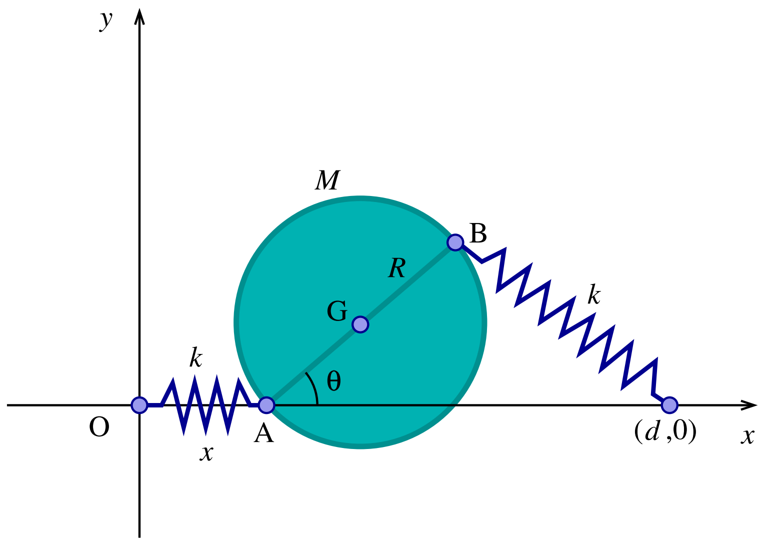
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 10 settembre 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [14 punti].
In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove un disco omogeneo di massa M e raggio R. Il punto A sul bordo del disco è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x (si veda la figura), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine O, $\underline{F_1} = -k\,\underline{\mathrm{OA}}$, $k > 0$. Il punto B, posizionato sempre sul bordo del disco, in posizione diametralmente opposta ad A, è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\underline{\mathrm{PB}}$, dove P è il punto di coordinate $(d, 0)$, con $d \in \mathbb{R}$. Il disco è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano assegnato e passante per A. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo ϑ che il dimetro AB del disco forma con l'asse x.

1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $d \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 1$, $R = 1$, $d = 4$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del disco rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}MR^2$.



2. Trasformazioni canoniche [6 punti].
Sia data la trasformazione dalle coordinate canoniche q, p alle coordinate Q, P, tale che

$$p = \frac{Q^\alpha}{1+q^2} + \beta Q^2, \qquad P = -\arctan q - qQ^\gamma,$$

con α, β, γ parametri reali positivi.

1. Dire per quali valori di α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. Per tali valori di α, β, γ, determinare la funzione generatrice della trasformazione canonica $F_1(q, Q)$.

[Si suggerisce di risolvere il primo punto imponendo che il differenziale $\mathrm{d}F_1$ sia esatto; per il secondo punto, si ricordi che $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x$].

IL TESTO CONTINUA ALLA PAGINA SUCCESSIVA

3. Relatività Ristretta [6 punti].
Sulla Terra viene captato un segnale elettromagnetico proveniente da un punto remoto dello Spazio. Questo segnale si ripete periodicamente, una volta ogni 6 mesi. Incuriositi, un gruppo di terrestri parte in direzione della sorgente dei segnali, con una astronave di nuova generazione che viaggia a velocità $v = \frac{1}{3}c$. Il momento della partenza coincide con la ricezione di uno dei segnali.

Nel frattempo, sulla Terra, gli scienziati analizzano il segnale alieno e, 2 anni dopo la partenza dell'astronave, capiscono che si tratta di una minaccia. Immediatamente inviano un segnale di emergenza all'astronave con l'ordine di tornare indietro. L'astronave, alla ricezione del segnale, inverte immediatamente la rotta per tornare sulla Terra (con la stessa velocità $v = \frac{1}{3}c$).

1. A che distanza dalla Terra si trova l'astronave quando inverte il moto?
2. Quanti segnali riceve in tutto l'astronave prima di tornare sulla Terra (incluso quello della partenza)?
3. Quanto tempo dura il viaggio per gli astronauti?

4. Urti tra particelle relativistiche [4 punti].
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Due particelle in moto lungo l'asse x, di masse $m_1 = m_2 = m$ e velocità lungo l'asse x $v_1 = \frac{4}{5}c$ e $v_2 = -\frac{3}{5}c$, collidono. In seguito all'urto, si produce un'unica particella di massa a riposo M che si muove con velocità V. Determinare il rapporto $\lambda = M/m$ e la velocità V.

Soluzioni della prova scritta di Meccanica Analitica e Relativistica del 10 settembre 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $x_{\rm G} = x + R\cos\vartheta$, $y_{\rm G} = R\sin\vartheta$, $x_{\rm B} = x + 2R\cos\vartheta$, $y_{\rm B} = 2R\sin\vartheta$, $|OA|^2 = x^2$ e

$$|PB|^2 = (d - 2R\cos\vartheta - x)^2 + 4R^2\sin^2\vartheta = x^2 - 2dx + 4R(x-d)\cos\vartheta + \text{cost},$$

quindi l'energia potenziale del corpo è

$$U = \frac{k}{2}\left[2x^2 - 2dx + 4R(x-d)\cos\vartheta\right]$$

e, dato il momento di inerzia del corpo rispetto al centro di massa $I_{\rm G} = \frac{1}{2}MR^2$, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M(\dot x_{\rm G}^2 + \dot y_{\rm G}^2) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot\vartheta^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot x^2 + R^2\dot\vartheta^2 - 2R\dot x\dot\vartheta\sin\vartheta\right) + \frac{1}{4}MR^2\dot\vartheta^2\,.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$U_x = k\,(2x - d + 2R\cos\vartheta)\ ,$$
$$U_\vartheta = -2kR(x-d)\sin\vartheta\,.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = \frac{d}{2} - R\cos\vartheta\,.$$

La prima posizione di equilibrio è $\vartheta = 0$, $x = \frac{d}{2} - R$.
La seconda posizione di equilibrio è $\vartheta = \pi$, $x = \frac{d}{2} + R$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $x = d$ e $\cos\vartheta = -\frac{d}{2R}$, che esistono solo se $2R \geq |d|$.
Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$U_{xx} = 2k\,, \qquad U_{x\vartheta} = -2kR\sin\vartheta\,,$$

$$U_{\vartheta\vartheta} = -2kR(x-d)\cos\vartheta = 2kR\left(\frac{d}{2} + R\cos\vartheta\right)\cos\vartheta\,.$$

Siccome $U_{xx} > 0$, la stabilità si valuta dal segno del determinante hessiano

$$\det\mathbb{U} = 4k^2R\left(\frac{d}{2} + R\cos\vartheta\right)\cos\vartheta - 4k^2R^2\sin^2\vartheta\,.$$

Si ha quindi che per la prima posizione di equilibrio $\det\mathbb{U} = 4k^2R\left(\frac{d}{2} + R\right) > 0$ quindi è stabile per $d > -2R$.
Per la seconda posizione di equilibrio $\det\mathbb{U} = 4k^2R\left(-\frac{d}{2} + R\right)$, stabile per $d < 2R$.
Per le posizioni $3, 4$ infine $\det\mathbb{U} = -4k^2R^2\sin^2\vartheta < 0$ quindi esse sono sempre instabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia la sola posizione stabile è la prima, $\vartheta = 0$, $x = 1$. In tale posizione, La matrice Hessiana dell'energia cinetica è

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} M & -MR\sin\vartheta \\ -MR\sin\vartheta & \frac{3}{2}MR^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\,.$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale è

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}\,.$$

L'equazione secolare $\det|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}| = 0$ dà

$$\left(2-\omega^2\right)\left(6-\frac{3}{2}\omega^2\right) = 0\,,$$

che ammette due soluzioni positive,

$$\omega_-^2 = 2\,, \qquad \omega_+^2 = 4\,.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_- = \sqrt{2}$ e $\omega_+ = 2$.

2. Trasformazioni canoniche.
Si ha

$$\frac{\partial p}{\partial Q} = \frac{\alpha Q^{\alpha-1}}{1+q^2} + 2\beta Q, \qquad -\frac{\partial P}{\partial q} = \frac{1}{1+q^2} + Q^\gamma.$$

Imponendo che le due derivate siano uguali, essendo $1+q^2>0$, si ha

$$\alpha Q^{\alpha-1} + 2\beta q^2 Q + 2\beta Q = 1 + q^2 Q^\gamma + Q^\gamma.$$

Il termine centrale in ciascun membro è l'unico che contiene q^2. Uguagliando questi termini, si ha $\beta = \frac{1}{2}$ e $\gamma = 1$. Per questi valori, il terzo termine a primo e secondo membro diventano identici, quindi deve essere $\alpha Q^{\alpha-1} = 1$, che implica $\alpha = 1$.

Per questi valori si ha

$$p = \frac{Q}{1+q^2} + \frac{1}{2}Q^2, \qquad P = -\arctan q - qQ.$$

Integrando $\mathrm{d}F_1 = p\,\mathrm{d}q - P\,\mathrm{d}Q$ lungo una qualunque linea che unisce l'origine al punto generico (q,Q) si trova

$$F_1(q,Q) = Q\arctan q + \frac{1}{2}qQ^2.$$

3. Relatività Ristretta.
Chiamando $(t,x) = (0,0)$ l'evento della partenza (nel sistema di riferimento solidale con la Terra), l'astronave si muove all'andata con legge oraria $x_A(t) = vt$,mentre il segnale di emergenza segue $x_S(t) = c(t-t_0)$, essendo $t_0 = 2\,\mathrm{y}$ (y=year, anno) l'istante dell'invio. L'evento (t_1, x_1), sempre nel sistema di riferimento solidale con la Terra, in cui il segnale raggiunge l'astronave è dato da

$$x_A(t_1) = x_S(t_1) \equiv x_1 \qquad \Rightarrow \qquad vt_1 = c(t_1 - t_0) \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \frac{1}{1-v/c}t_0 = 3\,\mathrm{y} \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = vt_1 = 1\,\mathrm{ly},$$

(ly=light year, anno luce). Nel tragitto di ritorno l'astronave segue la legge oraria $x_{A'}(t) = x_1 - v(t-t_1)$ (nel sistema di riferimento solidale con la Terra). L'istante t_2 (nel sistema di riferimento solidale con la Terra) di arrivo sulla Terra è dato da

$$x_{A'}(t_2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = x_1 - v(t_2 - t_1) \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \frac{x_1}{v} + t_1 = 6\,\mathrm{y},$$

che è ovviamente il doppio della durata del viaggio di andata, visto che la velocità è la stessa. In questo tempo, l'astronave ha intercettato 13 segnali alieni, inclusi il primo e l'ultimo, entrambi ricevuti sul suolo terrestre. Il tempo trascorso per gli astronauti, assumendo che l'inversione di rotta sia avvenuta istantaneamente, è dato semplicemente da

$$\tau = t_2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 6\sqrt{\frac{8}{9}}\,\mathrm{y} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{y} = 5.7\,\mathrm{y}.$$

4. Urti tra particelle relativistiche.

Per la conservazione del quadri-impulso, la particella deve muoversi lungo l'asse x del sistema adottato. I fattori di Lorentz delle due particelle sono rispettivamente $\gamma_1 = 5/3$, $\gamma_2 = 5/4$. Scrivendo le equazioni per la componente spaziale e temporale del quadri-impulso abbiamo (dividendo per m)

$$\begin{aligned} \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 &= \lambda \gamma V, \\ \gamma_1 + \gamma_2 &= \lambda \gamma, \end{aligned}$$

con γ fattore di Lorentz della particella finale. Dalla seconda $\gamma\lambda = 5/3 + 5/4 = 35/12$. Quindi dalla prima

$$\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2 = \frac{7}{12} c = \frac{35}{12} V \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{5} c,$$

$\gamma = 5/\sqrt{24}$ e

$$\lambda = \frac{35}{12\gamma} = \frac{7}{\sqrt{6}}\,.$$