Corso di Meccanica Statistica - Compito del 12/02/2025
Prof. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche classiche, di massa m , non interagenti, confinate in una regione del piano xz che ha la forma di una striscia di larghezza L lungo x e altezza H lungo z . Il sistema è alla temperatura T . L'Hamiltoniana di singola particella è

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + mgz,$$

dove $\vec{p}$ e $\vec{r} = (x, z)$ sono vettori di uno spazio di dimensione $D = 2$, $0 \leq x \leq L$, $0 \leq z \leq H$, $p \equiv |\vec{p}|$, e $g > 0$ è una costante dimensionale. Si tratta dunque un gas ideale bidimensionale in presenza di un campo gravitazionale.

1. [3 punti] Calcolare l'energia libera del sistema.
2. [4 punti] Calcolare la pressione (definita come forza su lunghezza, essendo il problema in $D = 2$) alla base ($z = 0$) al centro ($z = H/2$) e in cima ($z = H$) alla striscia. Calcolare i valori in $z = 0$ e $z = H$ anche nel limite per $H \rightarrow \infty$.
3. [3 punti] Calcolare il valore del potenziale chimico e dimostrare che è indipendente da z .

Assumiamo ora che le particelle siano bosoni con spin 1.

4. [4 punti] Trovare la temperatura di condensazione T_0 nel limite in cui $k_B T_0 \ll mgH$.
5. [2 punti] Trovare la probabilità che una particella abbia $z > \frac{H}{2}$ a $T = 0$ K.
6. [4 punti] Calcolare la energia media per particella per $T = T_0$, in funzione di T_0 .

Assumiamo ora che le particelle siano fermioni con spin 1/2 e che $\epsilon_F < mgH$.

7. [3 punti] Calcolare l'energia di Fermi ϵ_F .
8. [3 punti] Calcolare il valore medio dell'energia per particella per $T = 0$ K, in funzione di ϵ_F .
9. [4 punti] Calcolare l'altezza media di ogni particella, $\langle z \rangle$, per $T = 0$ K, in funzione di ϵ_F .

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$.

Risoluzione

Particelle classiche

1. Posto $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$, la funzione di partizione di singola particella è

$$Z_1 = \frac{1}{h^2} \int_0^L dx \int_0^H dz \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\beta \frac{p_x^2 + p_z^2}{2m} - \beta mgz} = \frac{2\pi L m k_B T}{h^2} \int_0^H dz e^{-\beta mgz} = \frac{2\pi L (k_B T)^2}{gh^2} (1 - e^{-\beta mgH})$$

e l'energia libera A del sistema è

$$A = -k_B T \ln \frac{Z_1^N}{N!} \approx -N k_B T \ln \frac{Z_1 e}{N} = -N k_B T \ln \left[\frac{2\pi e L (k_B T)^2}{gh^2 N} (1 - e^{-\beta mgH}) \right].$$

2. Per calcolare la pressione ci ricordiamo che in un gas ideale in presenza di un campo esterno $\beta P(x, z) = \rho(x, z)$. Occorre dunque calcolare $\rho(x, z)$. Definendo $\mathcal{P}(x, z)$ la densità di probabilità di trovare la singola particella in x, z , si ha

$$\rho(x, z) dx dz = dN(x, z) = N \mathcal{P}(x, z) dx dz,$$

e

$$P(x, z) = \frac{\rho(x, z)}{\beta} = \frac{N}{\beta} \frac{e^{-\beta mgz}}{\int_0^L dx \int_0^H dz e^{-\beta mgz}} = \frac{Nmg}{L} \frac{e^{-\beta mgz}}{1 - e^{-\beta mgH}}.$$

La dipendenza da z è data dal fattore $e^{-\beta mgz}$, che vale 1, $e^{-\beta mgH/2}$, $e^{-\beta mgH}$, rispettivamente, alla base, al centro e in cima alla striscia. Nel limite $H \rightarrow \infty$,

$$\rho(x, z) = \frac{N\beta mg}{L} e^{-\beta mgz},$$

e

$$P(0) = \frac{Nmg}{L}, \quad P(\infty) = 0.$$

3. Anche nel caso del potenziale chimico, possiamo usare la formula per il gas ideale in un campo esterno costante V_0 , immaginando di risolvere il problema in uno specifico volumetto del campione. Ricordando che, nel caso del gas ideale bidimensionale,

$$\beta\mu = \ln(\rho\lambda^2) + \beta V_0,$$

dove $\lambda^2 \equiv h^2/(2\pi m k_B T)$, troviamo

$$\begin{aligned} \beta\mu(x, z) &= \ln[\rho(x, z)\lambda^2] + \beta mgz = \ln \frac{N\beta mg\lambda^2}{L} - \beta mgz - \ln(1 - e^{-\beta mgH}) + \beta mgz = \\ &= \ln \frac{N\beta mg\lambda^2}{L} - \ln(1 - e^{-\beta mgH}), \end{aligned}$$

che non dipende da x e z , come deve essere visto che il potenziale chimico in un sistema che scambia particelle deve essere lo stesso. Infatti, lo stesso risultato si trova calcolando direttamente la derivata dell'energia libera A rispetto al numero di particelle N .

Bosoni

Calcoliamo per iniziare la densità degli stati (con $g_s = 3$)

$$g(\epsilon) = \frac{g_s}{h^2} \int d\vec{r} d\vec{p} \delta(\mathcal{H} - \epsilon)$$

e, con il cambio di variabili $t = p^2/(2m)$, $y = mgz$, $dt = p dp/m$,

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi L g_s}{gh^2} \int_0^{mgH} dy \int_0^{+\infty} dt \delta(t + y - \epsilon) = \frac{2\pi L g_s}{gh^2} \int_0^{mgH} dy \theta(\epsilon - y).$$

Notiamo per il seguito che

$$g(\epsilon, z) = \frac{2\pi L m g_s}{h^2} \theta(\epsilon - mgz).$$

Troviamo infine

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi L g_s}{gh^2} \left\{ \int_0^\epsilon dy \theta(\epsilon) [1 - \theta(\epsilon - mgH)] + \int_0^{mgH} dy \theta(\epsilon - mgH) \right\} =$$

$$\frac{2\pi L g_s}{gh^2} [\epsilon \theta(\epsilon) + (mgH - \epsilon) \theta(\epsilon - mgH)].$$

Notiamo che il primo termine inizia da $\epsilon = 0$ mentre il secondo termine contribuisce solo per $\epsilon > mgH$.

4. Prima di tutto consideriamo il limite $k_B T_0 \equiv \beta_0^{-1} \ll mgH$. Questo vuol dire che potremo trascurare gli stati con energia maggiore di mgH , cioè il secondo termine della $g(\epsilon)$.

Per trovare la temperatura di condensazione T_0 , essendo la minima energia $\epsilon_{\min} = 0$, scriviamo

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2\pi L g_s}{gh^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2\pi L g_s}{\beta_0^2 gh^2} \Gamma(2) \zeta(2),$$

da cui, ricordando che $\Gamma(2) = 1$,

$$k_B T_0 = \left[\frac{N g h^2}{2\pi L g_s \zeta(2)} \right]^{1/2}.$$

5. A $T = 0$ K tutte le particelle sono nello stato fondamentale che ha energia $\epsilon = 0$. Quindi la probabilità di trovare una particella in $H/2$ è nulla.

6. Per calcolare l'energia media per particella scriviamo

$$\langle E/N \rangle = \frac{1}{N} \int \frac{\epsilon g(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2\pi L g_s}{N g h^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2\pi L g_s}{N \beta_0^3 g h^2} \Gamma(3) \zeta(3)$$

e, sostituendo l'espressione per N in funzione di T_0 , troviamo

$$\langle E/N \rangle = \frac{\Gamma(3) \zeta(3)}{\Gamma(2) \zeta(2)} k_B T_0 = \frac{2\zeta(3)}{\zeta(2)} k_B T_0.$$

Fermioni

In questo caso $g_s = 2$, e ricordiamo che $\epsilon_F < mgH$.

7.

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{2\pi Lg_s}{gh^2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon d\epsilon = \frac{\pi Lg_s}{gh^2} \epsilon_F^2,$$

da cui

$$\epsilon_F = \left(\frac{gh^2 N}{\pi Lg_s} \right)^{1/2}.$$

8. L'energia media per particella è

$$\langle E/N \rangle = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \frac{2\pi Lg_s}{Ngh^2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{2\pi Lg_s}{3Ngh^2} \epsilon_F^3$$

e, sostituendo l'espressione per N in funzione di ϵ_F , troviamo

$$\langle E/N \rangle = \frac{2}{3} \epsilon_F.$$

9. Avevamo trovato sopra che

$$g(\epsilon, z) = \frac{2\pi Lmg_s}{h^2} \theta(\epsilon - mgz) \equiv \mathcal{A} \theta(\epsilon - mgz),$$

quindi

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} \int_0^H z g(\epsilon, z) dz d\epsilon = \\ &= \frac{\mathcal{A}}{N} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \left\{ \theta(\epsilon) [1 - \theta(\epsilon - mgH)] \int_0^{\frac{\epsilon}{mg}} z dz + \theta(\epsilon - mgH) \int_0^H z dz \right\}. \end{aligned}$$

Per $\epsilon \leq \epsilon_F < mgH$ possiamo porre $\theta(\epsilon - mgH) = 0$ sotto il segno di integrale, quindi

$$\langle z \rangle = \frac{\mathcal{A}}{2m^2 g^2 N} \theta(\epsilon_F) \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^2 = \frac{\mathcal{A} \epsilon_F^3}{6m^2 g^2 N}.$$

Sostituendo l'espressione per N in funzione di ϵ_F , troviamo

$$\langle z \rangle = \frac{\epsilon_F}{3mg}.$$

Ciò implica che l'energia potenziale media di una particella è $mg\langle z \rangle = \frac{1}{3} \epsilon_F$.