

Corso di Meccanica Statistica - Compito del 12 febbraio 2026
Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche classiche, di massa m , non interagenti, in 2 dimensioni, a temperatura T . L'Hamiltoniana di singola particella è

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2,$$

dove $p \equiv |\vec{p}|$, $r \equiv |\vec{r}|$, con $\vec{p}, \vec{r} \in \mathbb{R}^2$, e ω è una costante con le dimensioni di una frequenza.

Per i calcoli numerici, si usino i valori $N = 10^{24}$, $m = 10^{-26}$ kg, $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$. Costante di Planck ridotta: $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34}$ J·s; costante di Boltzmann: $\kappa_B = 1.381 \times 10^{-23}$ J·K⁻¹.

1. [3 punti] Determinare l'energia per particella u e il calore specifico $c \equiv \frac{du}{dT}$ in funzione di T .
2. [4 punti] Determinare la velocità quadratica media $v_{\text{qm}} \equiv \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ in funzione di T e calcolarne il valore numerico per i valori assegnati dei parametri, quando $T = 300$ K.
3. [3 punti] Determinare la probabilità $\mathcal{P}$ che una particella abbia $r \geq \left(\frac{\kappa_B T}{m\omega^2}\right)^{1/2}$.

Assumiamo ora che le particelle siano bosoni con spin $S = 0$.

4. [4 punti] Determinare la temperatura di condensazione T_0 in funzione di N e calcolarne il valore numerico per i valori assegnati dei parametri.
5. [3 punti] Determinare la temperatura T^* alla quale il rapporto tra il numero di particelle fuori dal condensato e il numero di particelle nel condensato vale $N_{>}/N_0 = \frac{1}{3}$.
6. [3 punti] Determinare l'energia per particella u in funzione di T , per $T < T_0$.

Assumiamo ora che le particelle siano fermioni con spin $S = \frac{1}{2}$

7. [4 punti] Determinare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione di N e calcolare il valore numerico della temperatura di Fermi $T_F \equiv \frac{\epsilon_F}{\kappa_B}$ per i valori assegnati dei parametri.
8. [2 punti] Determinare la distanza massima di una particella dall'origine delle coordinate, r_{max} , in funzione di N .
9. [4 punti] Determinare la velocità massima di una particella v_{max} in funzione di N e calcolarne il valore numerico per i valori assegnati dei parametri.

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$; in particolare, si ricordano i valori notevoli: $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, $\Gamma(3) = 2$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, $\zeta(3) = 1.202$.

Risoluzione

Particelle classiche

1. Adottando sistemi di coordinate polari per $\vec{p}$ e $\vec{r}$, posto $\beta \equiv (\kappa_B T)^{-1}$, la funzione di partizione di singola particella è

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(2\pi)^2}{h^2} \int_0^\infty e^{-\beta p^2/2m} p \, dp \int_0^\infty e^{-\beta m\omega^2 r^2/2} r \, dr \\ &= \frac{(2\pi)^2}{h^2 \omega^2 \beta^2} \int_0^\infty e^{-y} dy \int_0^\infty e^{-x} dx = \frac{1}{h^2 \omega^2 \beta^2}. \end{aligned}$$

L'energia media per particella è

$$u = -\frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta} = 2\kappa_B T.$$

Quindi

$$c = \frac{du}{dT} = 2\kappa_B$$

è costante.

2. Per calcolare la velocità quadratica media usiamo

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{m^2} \langle p^2 \rangle = \frac{1}{m^2} \frac{\int_0^\infty e^{-\beta p^2/2m} p^3 \, dp}{\int_0^\infty e^{-\beta p^2/2m} p \, dp} = \frac{2}{m\beta} \frac{\int_0^\infty y e^{-y} \, dy}{\int_0^\infty e^{-y} \, dy} = \frac{2\kappa_B T}{m},$$

da cui

$$v_{\text{qm}} = \sqrt{\frac{2\kappa_B T}{m}}.$$

Sostituendo i valori assegnati per i parametri, si trova $v_{\text{qm}} = 0.9102 \times 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

3. Posto $r^*(T) \equiv \left(\frac{\kappa_B T}{m\omega^2}\right)^{1/2}$, abbiamo

$$\mathcal{P} = \frac{\int_{r^*(T)}^\infty e^{-\beta m\omega^2 r^2/2} r \, dr}{\int_0^\infty e^{-\beta m\omega^2 r^2/2} r \, dr} = \frac{\int_{1/2}^\infty e^{-x} \, dx}{\int_0^\infty e^{-x} \, dx} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6065.$$

Bosoni

4. Posta $g_S \equiv 2S + 1$ la degenerazione di spin, la densità degli stati di singola particella è

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{(2\pi)^2 g_S}{h^2} \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dr r \delta\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2} - \epsilon\right) = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \delta(x + y - \epsilon) \\ &= \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^\infty dy \theta(\epsilon - y) = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \epsilon \theta(\epsilon). \end{aligned}$$

Osservando che $\epsilon_{min} = 0$ e $g_S = 1$, posto $\beta_0 \equiv (\kappa_B T_0)^{-1}$, l'equazione per determinare la temperatura di condensazione è

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon d\epsilon}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2 \beta_0^2} \int_0^\infty \frac{z dz}{e^z - 1} = \left(\frac{\kappa_B T_0}{\hbar \omega}\right)^2 \Gamma(2) \zeta(2),$$

da cui

$$\kappa_B T_0 = \hbar \omega \left(\frac{6N}{\pi^2}\right)^{1/2}.$$

Sostituendo i valori assegnati per i parametri, si trova $T_0 = 5.955 \text{ K}$.

5. Per $T < T_0$, si ha

$$N_{>} = \left(\frac{\kappa_B T}{\hbar \omega}\right)^2 \Gamma(2) \zeta(2).$$

Ponendo

$$\frac{1}{3} = \frac{N_{>}}{N_0} = \frac{N_{>}}{N - N_{>}},$$

si trova

$$N_{>} = \frac{1}{4} N = \frac{1}{4} \left(\frac{\kappa_B T_0}{\hbar \omega}\right)^2 \Gamma(2) \zeta(2) \quad \Rightarrow \quad (T^*)^2 = \frac{1}{4} T_0^2 \quad \Rightarrow \quad T^* = \frac{1}{2} T_0 = 2.978 \text{ K}.$$

6. Per $T < T_0$, l'energia interna è

$$U = \int_0^\infty \frac{\epsilon g(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta \epsilon} - 1} = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} = \frac{1}{\hbar^2 \omega^2 \beta^3} \int_0^\infty \frac{z dz}{e^z - 1} = \left(\frac{\kappa_B T}{\hbar \omega}\right)^2 \Gamma(3) \zeta(3) \kappa_B T,$$

per cui

$$u = \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \frac{\Gamma(3) \zeta(3)}{\Gamma(2) \zeta(2)} \kappa_B T = \frac{14.42}{\pi^2} \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \kappa_B T = 1.461 \left(\frac{T}{T_0}\right)^2 \kappa_B T.$$

Fermioni

7. In questo caso $g_S = 2$ e

$$N = \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{2}{\hbar^2 \omega^2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon d\epsilon = \left(\frac{\epsilon_F}{\hbar \omega} \right)^2 \Rightarrow \epsilon_F = \hbar \omega N^{1/2}.$$

Sostituendo i valori assegnati per i parametri, si trova $\epsilon_F = 1.055 \times 10^{-22} \text{ J}$, che corrisponde ad una temperatura $T_F = \frac{\epsilon_F}{\kappa_B} = 7.638 \text{ K}$.

8. Si ha $\frac{1}{2} m \omega^2 r_{\max}^2 = \epsilon_F$, da cui

$$r_{\max} = \left(\frac{2\epsilon_F}{m\omega^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\hbar}{m\omega} \right)^{1/2} N^{1/4}.$$

9. Si ha $\frac{1}{2m} p_{\max}^2 = \epsilon_F$, da cui $p_{\max} = (2m\epsilon_F)^{1/2}$ e

$$v_{\max} = \frac{p_{\max}}{m} = \left(\frac{2\epsilon_F}{m} \right)^{1/2} = \left(\frac{2\hbar\omega}{m} \right)^{1/2} N^{1/4}.$$

Sostituendo i valori assegnati per i parametri, si trova $v_{\max} = 145.2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.