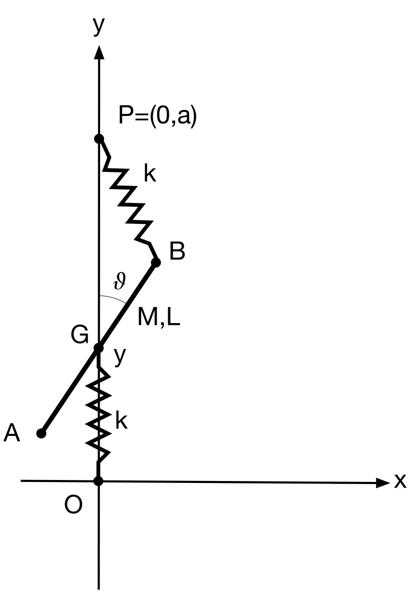
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 13 luglio 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [14 punti].
In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove un'asta rigida e omogenea AB, di massa M e lunghezza L. Il centro di massa G dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse y (si veda la figura), ed è soggetto ad una forza elastica che lo attrae verso l'origine O, $\underline{F_1} = -k\,\mathrm{OG}$, $k > 0$. L'estremo B dell'asta è soggetto ad una forza elastica $\underline{F_2} = -k\,\mathrm{PB}$, dove P è il punto di coordinate $(0, a)$, con $a \in \mathbb{R}$. L'asta è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano assegnato e passante per G. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ordinata y di G e l'angolo ϑ che l'asta AB forma con l'asse y.

1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 1$, $L = a = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12}ML^2$.



2. Trasformazioni canoniche [6 punti].
Sia data la trasformazione dalle coordinate canoniche q, p alle coordinate

$$Q = \left(\alpha + \gamma\frac{q}{p}\right) \mathrm{e}^{q^2} ,$$

$$P = \frac{p^\beta}{2q}\,\mathrm{e}^{-q^2} .$$

1. Trovare *tutti* i valori di α, β, γ per i quali la trasformazione è canonica.
2. Per tali valori, trovare la funzione generatrice del secondo tipo, $F_2(q, P)$.

IL TESTO CONTINUA ALLA PAGINA SUCCESSIVA

3. Relatività Ristretta [5 punti].
Da una stazione spaziale distante $L = 3\,\mathrm{ly}$ (anni-luce) dalla Terra e ferma relativamente a essa viene inviato un segnale in direzione della Terra con cadenza annuale. All'arrivo di uno di tali segnali, un'astronave parte dalla Terra con velocità $v_1 = \frac{4}{5}c$ diretta verso la stazione spaziale. Al quarto segnale ricevuto dall'astronave (incluso quello all'arrivare del quale essa è partita), essa inverte istantaneamente il verso del moto e torna verso la Terra con velocità $v_2 = \frac{2}{5}c$.

1. Quanta distanza dalla Terra Δx ha percorso l'astronave quando inverte il moto?

2. Quanti segnali riceve in tutto l'astronave prima di tornare sulla Terra (incluso quello della partenza)?

3. Quanto tempo dura il viaggio per gli astronauti?

4. Urti tra particelle relativistiche [5 punti].
Una particella relativistica, di massa propria m, si muove lungo l'asse x di un sistema di riferimento inerziale solidale con il laboratorio L, con velocità $v = \frac{3}{5}c$. Ad un certo istante, la particella urta una particella di massa propria $2m$ in quiete nell'origine del sistema di riferimento adottato. Dopo l'urto, le due particelle iniziali si fondono in un'unica particella di massa propria M.

1. Si determini l'asse lungo il quale si muove la particella prodotta e la sua velocità V rispetto al sistema di riferimento adottato.

2. Si determini la massa propria M della particella prodotta, assumendo nota m.

3. La particella prodotta è instabile, con un tempo di vita medio $\tau = 600\,\mathrm{s}$, nel sistema di quiete della particella. Determinare il tempo di vita medio T della particella nel sistema di riferimento solidale con L.

Soluzioni della prova scritta di Meccanica Analitica e Relativistica del 13 luglio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $x_\mathrm{G} = 0$, $y_\mathrm{G} = y$, $x_\mathrm{P} = 0$, $y_\mathrm{P} = a$, $x_\mathrm{B} = \frac{L}{2}\sin\vartheta$, $y_\mathrm{B} = y + \frac{L}{2}\cos\vartheta$, $|OG|^2 = y^2$ e

$$|PB|^2 = \left(\frac{L}{2}\cos\vartheta + y - a\right)^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\vartheta = y^2 - 2ay + L(y-a)\cos\vartheta + \mathrm{cost},$$

quindi l'energia potenziale del corpo è

$$U = \frac{k}{2}\left[2y^2 - 2ay + L(y-a)\cos\vartheta\right]$$

e, dato il momento di inerzia del corpo rispetto al centro di massa $I_\mathrm{G} = \frac{1}{12}ML^2$, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M(\dot{x}_\mathrm{G}^2 + \dot{y}_\mathrm{G}^2) + \frac{1}{2}I_\mathrm{G}\dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + \frac{1}{24}ML^2\dot{\vartheta}^2\,.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$U_{,y} = k\left(2y - a + \frac{L}{2}\cos\vartheta\right)\,,$$
$$U_{,\vartheta} = -\frac{kL}{2}(y-a)\sin\vartheta\,.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$y = \frac{a}{2} - \frac{L}{4}\cos\vartheta\,.$$

La prima posizione di equilibrio è $\vartheta = 0$, $y = \frac{a}{2} - \frac{L}{4}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\vartheta = \pi$, $y = \frac{a}{2} + \frac{L}{4}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $y = a$ e $\cos\vartheta = -\frac{2a}{L}$, che esistono solo se $L > 2|a|$.
Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$U_{,yy} = 2k\,, \qquad U_{,y\vartheta} = -\frac{kL}{2}\sin\vartheta\,,$$

$$U_{,\vartheta\vartheta} = -\frac{kL}{2}(y-a)\cos\vartheta = \frac{kL}{2}\left(\frac{a}{2} + \frac{L}{4}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta\,.$$

Siccome $U_{,yy} > 0$, la stabilità si valuta dal segno del determinante hessiano

$$H = k^2L\left(\frac{a}{2} + \frac{L}{4}\cos\vartheta\right)\cos\vartheta - \frac{k^2L^2}{4}\sin^2\vartheta\,.$$

Si ha quindi che per la prima posizione di equilibrio $H = k^2L\left(\frac{a}{2} + \frac{L}{4}\right) > 0$ quindi è stabile per $a > -\frac{L}{2}$.
Per la seconda posizione di equilibrio $H = k^2L\left(-\frac{a}{2} + \frac{L}{4}\right)$, stabile per $a < \frac{L}{2}$.
Per le posizioni $3, 4$ infine $H = -\frac{k^2L^2}{4}\sin^2\vartheta < 0$ quindi esse sono sempre instabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia la sola posizione stabile è la prima, $\vartheta = 0$, $y = \frac{1}{4}$. In tale posizione, La matrice Hessiana dell'energia cinetica è

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}\,.$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale è

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{8} \end{pmatrix} .$$

L'equazione secolare $\det|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}| = 0$ dà

$$\left(2 - \omega^2\right)\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{12}\omega^2\right) = 0 \,,$$

che ammette due soluzioni positive,

$$\omega_+^2 = 2 \,, \qquad \omega_-^2 = \frac{9}{2} \,.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{2}$ e $\omega_- = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

2. Trasformazioni canoniche.

1. Imponendo la condizione $[Q, P]_{q,p} = 1$ otteniamo

   $$[Q, P]_{q,p} = \alpha\beta p^{\beta-1} + \gamma(\beta - 1)\left(q + \frac{1}{2q}\right) p^{\beta-2},$$

   da cui segue $\alpha = 1$, $\beta = 1$ mentre γ può assumere qualunque valore. La trasformazione è quindi

   $$Q = \left(1 + \gamma\frac{q}{p}\right) \mathrm{e}^{q^2}$$
   $$P = \frac{p}{2q}\,\mathrm{e}^{-q^2} .$$

2. Sappiamo che $\mathrm{d}F_2(q, P) = p\,\mathrm{d}q + Q\,\mathrm{d}P$, dobbiamo dunque invertire la trasformazione canonica:

   $$Q = \mathrm{e}^{q^2} + \frac{\gamma}{2P} \,,$$
   $$p = 2qP\,\mathrm{e}^{q^2} \,,$$

   da cui segue che

   $$F_2(q, P) = \int Q\,\mathrm{d}P = P\,\mathrm{e}^{q^2} + \frac{\gamma}{2}\log P + f(q),$$

   dove $f(q)$ si può determinare per confronto

   $$p = 2qP\,\mathrm{e}^{q^2} = \frac{\partial F_2}{\partial q} = 2qP\,\mathrm{e}^{q^2} + f'(q)$$

   che implica $f'(q) = 0$, ovvero $f(q) = \text{cost}$. Una funzione generatrice è dunque

   $$F_2(q, P) = P\,\mathrm{e}^{q^2} + \frac{\gamma}{2}\log P.$$

3. Relatività Ristretta.

1. Supponendo che l'astronave riceva il primo segnale al tempo $t = 0$ e parta istantaneamente, il quarto segnale al ricevimento del quale essa invertirà il moto verrà emesso sulla stazione spaziale a distanza $L = 3\,\text{ly}$ ad un tempo

   $$t^* = -\frac{L}{c} + 3\,\text{y} = 0 \,,$$

   misurato da un orologio sulla Terra. Essa riceverà il quarto segnale al tempo t_1 tale che

   $$v_1 t_1 + c t_1 = L \,, \qquad\qquad t_1 = \frac{L}{v_1 + c} = \frac{5}{3}\,\text{y (anni)}.$$

   L'astronave, prima di invertire il moto, percorre la distanza

   $$\Delta x = v_1 t_1 = \frac{v_1 L}{v_1 + c} \,.$$

2. Per tornare sulla Terra, l'astronave impiega in tutto

$$t_2 = t_1 + \frac{\Delta x}{v_2} = \frac{L}{v_1 + c}\left(\frac{v_1}{v_2} + 1\right) = 5\,\mathrm{y}$$

e quindi riceve in tutto 6 segnali dalla stazione orbitante (includendo il segnale arrivato al tempo 0 e il segnale che riceve quando arriva a Terra).

3. Il tempo che dura il viaggio per gli astronauti è

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}\, t_1 + \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}\,(t_2 - t_1) = \left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{21}\right)\,\mathrm{y} \approx 4.055\,\mathrm{y}.$$

4. Urti tra particelle relativistiche.

1. Per la conservazione del quadri-impulso, la particella deve muoversi lungo l'asse x del sistema adottato. Scrivendo le equazioni per la componente spaziale e temporale del quadri-impulso abbiamo

$$\frac{MV}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{mv}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{3}{4}mc, \qquad \frac{M}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} + 2m = \frac{13}{4}m.$$

Ricavando il rapporto $M/\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}$ dalla seconda e sostituendo nella prima si trova $V = \frac{3}{13}c$.

2. Sostituendo il valore di V trovato nella seconda equazione si trova $M = \sqrt{10}\,m$.

3. Vale la relazione

$$T = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} = \frac{13\sqrt{10}}{40}\tau = 616.6\,\mathrm{s}.$$