Appello Straordinario di Meccanica Statistica - Compito del 16/05/2025

Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, in equilibrio con un termostato alla temperatura T, confinate nella regione di spazio $\sqrt{x^2+y^2} \leq R$, $z \geq 0$, dove x, y, z sono coordinate Cartesiane nel sistema di riferimento adottato. Si tratta dunque di un cilindro semi-indefinito di area di base $\mathcal{A} = \pi R^2$. L'Hamiltoniana di singola particella è

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + mgz,$$

dove $\vec{p}$ è l'impulso, $p \equiv |\vec{p}|$, $\vec{r}$ è il vettore di componenti (x, y, z) e $g > 0$ è una costante dimensionale. Il gas si trova quindi in un campo gravitazionale uniforme.

Si assuma che le particelle siano descritte dalla fisica classica.

1. [3 punti] Calcolare l'energia interna per particella $u \equiv U/N$.
2. [4 punti] Calcolare la probabilità $\mathcal{W}(H)$ che una particella si trovi nella regione di spazio $z \geq H$ (con $H \geq 0$), la massa $\mathcal{M}(H)$ del gas contenuto nella regione di spazio $z \geq H$ e la forza peso per unità di superficie esercitata da tale massa, $\gamma(H) \equiv \mathcal{M}(H)g/\mathcal{A}$.
3. [3 punti] Dimostrare che $\gamma(H)$ è uguale alla pressione del gas $P(H)$ alla generica quota $z = H$.

Si assuma ora che le particelle siano bosoni con spin $s = 0$.

4. [4 punti] Trovare la temperatura di condensazione T_0, in funzione di N.
5. [3 punti] Trovare la frazione di particelle nel condensato per $T = \frac{1}{4}T_0$.
6. [3 punti] Calcolare l'energia media per particella alla temperatura $T = \frac{1}{4}T_0$, in funzione di T_0.

Si assuma ora che le particelle siano fermioni con spin $s = \frac{1}{2}$ e il gas si trovi a $T = 0\,\mathrm{K}$.

7. [3 punti] Calcolare l'energia di Fermi ϵ_F, in funzione di N.
8. [3 punti] Calcolare il valore medio dell'energia per particella, in funzione di ϵ_F.
9. [4 punti] Calcolare il valore medio del modulo dell'impulso di una particella, $\langle p \rangle$, in funzione di ϵ_F, e confrontare il valore trovato con l'impulso massimo di una particella, $p_{\max}$.

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}$. In particolare, $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$, $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{5}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$; $\zeta\left(\frac{5}{2}\right) \approx 1.341$, $\zeta\left(\frac{7}{2}\right) \approx 1.127$.

Risoluzione

Particelle classiche

1. Posto $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$ e adottato un sistema di coordinate cilindriche per l'integrale sulle variabili spaziali, la funzione di partizione di singola particella è

$$Z_1 = \frac{\pi R^2}{h^3} \int_0^\infty \mathrm{d}z \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_y \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_z \, \mathrm{e}^{-\beta\left(\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}+mgz\right)} =$$

$$\frac{\pi R^2}{h^3} \int_0^\infty \mathrm{d}z \, \mathrm{e}^{-\beta mgz} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_x \, \mathrm{e}^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_y \, \mathrm{e}^{-\beta\frac{p_y^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p_z \, \mathrm{e}^{-\beta\frac{p_z^2}{2m}} = \frac{\pi R^2}{h^3 \beta mg} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

e l'energia interna per particella è

$$u = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1 = \frac{5}{2} k_B T.$$

2. La probabilità cercata è

$$\mathcal{W}(H) = \frac{\int_H^\infty \mathrm{e}^{-\beta mgz} \, \mathrm{d}z}{\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\beta mgz} \, \mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{-\beta mgH}.$$

La massa cercata è data dal prodotto della massa m di una particella per il numero di particelle nella regione di spazio assegnata, $N\,\mathcal{W}(H)$, quindi

$$\mathcal{M}(H) = Nm \, \mathrm{e}^{-\beta mgH}.$$

Allora,

$$\gamma(H) = \frac{\mathcal{M}(H)\, g}{\mathcal{A}} = \frac{Nmg \, \mathrm{e}^{-\beta mgH}}{\pi R^2}.$$

3. Posto $\mathrm{d}N_H = N\beta mg \, \mathrm{e}^{-\beta mgH} \, \mathrm{d}z$ il numero di particelle nel cilindro infinitesimo di area di base $\mathcal{A}$ e altezza $\mathrm{d}z$, posto alla quota H, la pressione del gas alla quota H è data dalla legge dei gas perfetti applicata al volumetto $\mathcal{A}\,\mathrm{d}z$,

$$P(H) = \frac{k_B T \, \mathrm{d}N_H}{\mathcal{A}\, \mathrm{d}z} = \frac{Nmg \; \mathrm{e}^{-\beta mgH}}{\pi R^2},$$

che coincide con l'espressione di $\gamma(H)$ trovata al punto precedente. Essendo il sistema all'equilibrio, la forza peso della massa sovrastante deve essere, ad ogni quota H, bilanciata dalle forze di pressione.

Bosoni

Posta $g_s \equiv 2s+1$ la degenerazione di spin, calcoliamo per iniziare la densità degli stati

$$g(\epsilon) = \frac{g_s}{h^3} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\,\mathrm{d}^3\vec{p}\;\delta(\mathcal{H}-\epsilon).$$

Introducendo un sistema di coordinate cilindriche per $\vec{r}$ e un sistema di coordinate sferiche per $\vec{p}$, troviamo

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi^2 R^2 g_s}{h^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2 \int_0^\infty \mathrm{d}z\, \delta\left(mgz + \frac{p^2}{2m} - \epsilon\right) = \frac{4\pi^2 R^2 g_s}{mgh^3} \int_0^\infty \mathrm{d}p\, p^2\, \theta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right).$$

Notiamo per il seguito che la densità degli stati congiunta per le variabili ϵ e p è

$$g(\epsilon, p) = \frac{4\pi^2 R^2 g_s}{mgh^3}\, p^2\, \theta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right).$$

Troviamo infine

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi^2 R^2 g_s}{mgh^3}\, \theta(\epsilon) \int_0^{\sqrt{2m\epsilon}} \mathrm{d}p\, p^2 = \frac{4\pi^2 R^2 g_s}{3mgh^3}\, (2m\epsilon)^{3/2}\; \theta(\epsilon).$$

4. Posto $k_B T_0 \equiv \beta_0^{-1}$, essendo la minima energia $\epsilon_{\min} = 0$, per trovare la temperatura di condensazione T_0 scriviamo

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_0\epsilon}-1}\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{7/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{3gh^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{\mathrm{e}^{\beta_0\epsilon}-1}\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{7/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{3gh^3\beta_0^{5/2}}\, \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) \zeta\left(\tfrac{5}{2}\right),$$

da cui

$$k_B T_0 = \left[\frac{3gh^3 N}{2^{7/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}\right]^{2/5}.$$

5. Per $T < T_0$, le particelle fuori dal condensato sono

$$N_> = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon}-1}\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{7/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{3gh^3\beta^{5/2}}\, \Gamma\left(\tfrac{5}{2}\right) \zeta\left(\tfrac{5}{2}\right) = N \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2}.$$

Allora, la frazione di particelle nel condensato è

$$\frac{N_0}{N} = 1 - \frac{N_>}{N} = 1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{5/2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{N_0(T = \frac{1}{4}T_0)}{N} = 1 - \frac{1}{2^5} = \frac{31}{32} \approx 0.969.$$

6. Siccome per $T < T_0$ le particelle nel condensato non contribuiscono, per calcolare l'energia media per particella scriviamo

$$\left\langle \frac{E}{N} \right\rangle = \frac{1}{N} \int \frac{\epsilon\, g(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon}-1}\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{7/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{3Ngh^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{5/2}}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon}-1}\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{7/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{3Ngh^3\beta^{7/2}}\, \Gamma\left(\tfrac{7}{2}\right) \zeta\left(\tfrac{7}{2}\right).$$

Ponendo $T = \frac{1}{4}T_0$, come richiesto, e sostituendo l'espressione per N in funzione di T_0, troviamo

$$\left\langle \frac{E}{N} \right\rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{2^7\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}\, k_B T_0 = \frac{5\,\zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{2^8\zeta\left(\frac{5}{2}\right)}\, k_B T_0 \approx 0.0164\, k_B T_0.$$

Fermioni

7. Abbiamo

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} g(\epsilon)\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{7/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{3gh^3}\,\theta(\epsilon_F)\int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{3/2}\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{9/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{15gh^3}\,\epsilon_F^{5/2}\,\theta(\epsilon_F),$$

da cui

$$\epsilon_F = \left(\frac{15gh^3 N}{2^{9/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}\right)^{2/5}.$$

8. L'energia media per particella è

$$\left\langle \frac{E}{N} \right\rangle = \frac{1}{N}\int_0^{\epsilon_F} \epsilon\, g(\epsilon)\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{7/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{3gh^3 N}\,\theta(\epsilon_F)\int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{5/2}\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{2^{9/2}\pi^2 m^{1/2} R^2 g_s}{21gh^3 N}\,\epsilon_F^{7/2}.$$

Sostituendo l'espressione per N in funzione di ϵ_F, troviamo

$$\left\langle \frac{E}{N} \right\rangle = \tfrac{5}{7}\,\epsilon_F.$$

9. Avevamo trovato sopra che la densità degli stati congiunta per le variabili ϵ e p è

$$g(\epsilon, p) = \frac{4\pi^2 R^2 g_s}{mgh^3}\, p^2\,\theta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m}\right),$$

quindi

$$\langle p \rangle = \frac{1}{N}\int_0^{\epsilon_F}\int_0^{\infty} p\, g(\epsilon, p)\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{4\pi^2 R^2 g_s}{mgh^3 N}\int_0^{\epsilon_F}\int_0^{\sqrt{2m\epsilon}} p^3\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}\epsilon =$$
$$= \frac{4\pi^2 m R^2 g_s}{gh^3 N}\int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2\,\mathrm{d}\epsilon = \frac{4\pi^2 m R^2 g_s}{3gh^3 N}\,\epsilon_F^3.$$

Sostituendo l'espressione per N in funzione di ϵ_F, troviamo

$$\langle p \rangle = \sqrt{\tfrac{25}{32}\, m\epsilon_F} = \tfrac{5}{8}\, p_{\max},$$

dove $p_{\max} = \sqrt{2m\epsilon_F}$.