

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche classiche, di massa m , non interagenti, confinate nella regione di spazio $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z$, dove x, y, z sono coordinate cartesiane nel sistema di riferimento assegnato. Il sistema è in equilibrio con un termostato alla temperatura T . L'Hamiltoniana di singola particella è

$$\mathcal{H}(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{p^2}{2m} + mgz,$$

dove $\vec{p} = (p_x, p_y, p_z)$, $\vec{r} = (x, y, z)$, $p \equiv |\vec{p}|$, e $g > 0$ è una costante dimensionale. Si tratta dunque un gas perfetto in presenza di un campo gravitazionale.

1. [3 punti] Determinare l'energia libera di Helmholtz del sistema.
2. [4 punti] Determinare la pressione del gas $P(z)$ ad una quota generica z e mostrare che la pressione per $z = 0$ è uguale alla forza peso esercitata dal gas per unità di superficie.
3. [3 punti] Determinare il potenziale chimico μ del gas.

Si assuma ora che le particelle siano bosoni con spin $s = 0$.

4. [4 punti] Determinare la temperatura di condensazione T_0 .
5. [2 punti] Determinare la frazione di particelle fuori dal condensato per $T = \frac{9}{16}T_0$
6. [4 punti] Determinare l'energia media per particella per $T = T_0$, in funzione di T_0 .

Si assuma ora che le particelle siano fermioni con spin $s = \frac{1}{2}$ e il gas si trovi a $T = 0$ K.

7. [3 punti] Determinare l'energia di Fermi ϵ_F , in funzione di N .
8. [3 punti] Determinare il valore medio dell'energia per particella, in funzione di ϵ_F .
9. [4 punti] Determinare l'altezza media delle particelle, $\langle z \rangle$, in funzione di ϵ_F .

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$.

Risoluzione

Particelle classiche

1. Posto $\beta \equiv (k_B T)^{-1}$, la funzione di partizione di singola particella è

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \int_{-\infty}^{+\infty} dp_z e^{-\beta \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} - \beta mgz} =$$

$$\frac{(2\pi)^{3/2} m^{1/2} ab (k_B T)^{5/2}}{gh^3}$$

e l'energia libera A del sistema è

$$A = -k_B T \ln \frac{Z_1^N}{N!} \approx -N k_B T \ln \frac{Z_1}{N} = -N k_B T \ln \left[\frac{(2\pi)^{3/2} e m^{1/2} ab (k_B T)^{5/2}}{gh^3 N} \right].$$

2. Per calcolare la pressione ci ricordiamo che in un gas ideale in presenza di un campo esterno $\beta P(z) = \rho(z)$. Occorre dunque calcolare la densità del gas ad una quota z , $\rho(z)$. Definendo $\mathcal{P}(z)$ la densità di probabilità di trovare la singola particella alla quota z , si ha

$$ab \rho(z) dz = dN(z) = N \mathcal{P}(z) dz,$$

e

$$P(z) = \frac{\rho(z)}{\beta} = \frac{N}{ab \beta} \mathcal{P}(z) = \frac{N}{ab \beta} \frac{e^{-\beta mgz}}{\int_0^\infty dz e^{-\beta mgz}} = \frac{Nmg}{ab} e^{-\beta mgz}.$$

Si ha quindi

$$P(0) = \frac{Nmg}{ab},$$

cioè la pressione per $z = 0$ è uguale alla forza peso esercitata dalla massa totale del gas, Nm , divisa per l'area ab della superficie sulla quale grava il gas.

3. Il potenziale chimico è

$$\mu = \frac{\partial A}{\partial N} = -k_B T \ln \frac{Z_1}{N} = -k_B T \ln \left[\frac{(2\pi)^{3/2} m^{1/2} ab (k_B T)^{5/2}}{gh^3 N} \right].$$

Bosoni

Calcoliamo per iniziare la densità degli stati

$$g(\epsilon) = \frac{g_s}{h^3} \int d^3\vec{r} d^3\vec{p} \delta(\mathcal{H} - \epsilon)$$

e, con il cambio di variabili $t = p^2/(2m)$, $w = mgz$, $dt = p dp/m$,

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{4\pi ab (2m)^{1/2} g_s}{gh^3} \int_0^\infty dw \int_0^\infty dt \sqrt{t} \delta(t + w - \epsilon) \\ &= \frac{4\pi ab (2m)^{1/2} g_s}{gh^3} \int_0^\infty dw \sqrt{\epsilon - w} \theta(\epsilon - w) = \frac{2^{7/2} \pi ab m^{1/2} g_s}{3gh^3} \epsilon^{3/2} \theta(\epsilon). \end{aligned}$$

Dal passaggio intermedio, ricordando che $w = mgz$, deduciamo la densità degli stati congiunta per l'energia e la coordinata z ,

$$g(\epsilon, z) = \frac{2^{5/2} \pi ab m^{3/2} g_s}{h^3} \sqrt{\epsilon - mgz} \theta(\epsilon - mgz),$$

che utilizzeremo in seguito. Notiamo che l'energia minima è $\epsilon_{\min} = 0$.

4. Poniamo $g_s = 1$. Per trovare la temperatura di condensazione T_0 , essendo $\epsilon_{\min} = 0$, scriviamo

$$N = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2^{7/2} \pi ab m^{1/2}}{3gh^3} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{3/2}}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2^{7/2} \pi ab m^{1/2}}{3gh^3 \beta_0^{5/2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right),$$

da cui,

$$k_B T_0 = \left[\frac{3gh^3 N}{2^{7/2} \pi ab m^{1/2} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right)} \right]^{2/5}.$$

5. Per $T < T_0$, le particelle fuori dal condensato sono

$$N_{>} = \int_0^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2^{7/2} \pi ab m^{1/2}}{3gh^3 \beta^{5/2}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right).$$

Allora

$$\frac{N_{>}}{N} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2}$$

e, per $T = \frac{9}{16} T_0$, si ha

$$\frac{N_{>}}{N} = \left(\frac{3}{4} \right)^5 = \frac{243}{1024} \approx 0.237 = 23.7\%.$$

6. Per calcolare l'energia media per particella per $T = T_0$ scriviamo

$$\langle E/N \rangle = \frac{1}{N} \int \frac{\epsilon g(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2^{7/2} \pi ab m^{1/2}}{3gh^3 N} \int_0^\infty \frac{\epsilon^{5/2}}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2^{7/2} \pi ab m^{1/2}}{3gh^3 \beta_0^{7/2}} \Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \zeta\left(\frac{7}{2}\right),$$

e, sostituendo l'espressione per N in funzione di T_0 , troviamo

$$\langle E/N \rangle = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) \zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \zeta\left(\frac{5}{2}\right)} k_B T_0 = \frac{5\zeta\left(\frac{7}{2}\right)}{2\zeta\left(\frac{5}{2}\right)} k_B T_0.$$

Fermioni

In questo caso poniamo $g_s = 2$. Poiché $\epsilon_{\min} = 0$, nel seguito assumeremo $\epsilon_F \geq 0$.

7. Il numero di particelle è dato da

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{2^{9/2} \pi a b m^{1/2}}{3 g h^3} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{3/2} d\epsilon = \frac{2^{11/2} \pi a b m^{1/2}}{15 g h^3} \epsilon_F^{5/2},$$

da cui

$$\epsilon_F = \left(\frac{15 g h^3 N}{2^{11/2} \pi a b m^{1/2}} \right)^{2/5}.$$

8. L'energia media per particella è

$$\langle E/N \rangle = \int_0^{\epsilon_F} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \frac{2^{9/2} \pi a b m^{1/2}}{3 g h^3 N} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^{5/2} d\epsilon = \frac{2^{11/2} \pi a b m^{1/2}}{21 g h^3 N} \epsilon_F^{7/2}$$

e, sostituendo l'espressione per N in funzione di ϵ_F e l'espressione della costante $\mathcal{A}$, troviamo

$$\langle E/N \rangle = \frac{5}{7} \epsilon_F.$$

9. Avevamo trovato sopra che

$$g(\epsilon, z) = \frac{2^{7/2} \pi a b m^{3/2}}{h^3} \sqrt{\epsilon - m g z} \theta(\epsilon - m g z) \equiv \mathcal{A} \sqrt{\epsilon - m g z} \theta(\epsilon - m g z)$$

quindi

$$\begin{aligned} \langle z \rangle &= \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} \int_0^{\infty} z g(\epsilon, z) dz d\epsilon = \\ &= \frac{4 \mathcal{A}}{15 (m g)^2 N} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^{5/2} = \frac{8 \mathcal{A} \epsilon_F^{7/2}}{105 (m g)^2 N}. \end{aligned}$$

Sostituendo l'espressione per N in funzione di ϵ_F , troviamo

$$\langle z \rangle = \frac{2 \epsilon_F}{7 m g}.$$

Ciò implica che l'energia potenziale media di una particella è $m g \langle z \rangle = \frac{2}{7} \epsilon_F$.