Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 febbraio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una guida quadrata omogenea ABCD, di lato a e massa m. Il punto medio M del lato AB della guida quadrata è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Ox, e la guida quadrata è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per M (si veda la Fig. 1). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OM}$, con $k > 0$, e $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HB}$, con H proiezione ortogonale di B sulla retta $y = d$ (con $d > 0$). Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di M e l'angolo θ che il lato AB della guida quadrata forma con il verso positivo dell'asse Ox.
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{a}{d} > 0$.
3. Ponendo ora $k = 1$, $m = 1$, $a = 4$, $d = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della guida quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_\mathrm{G} = \frac{4}{3}ma^2$.

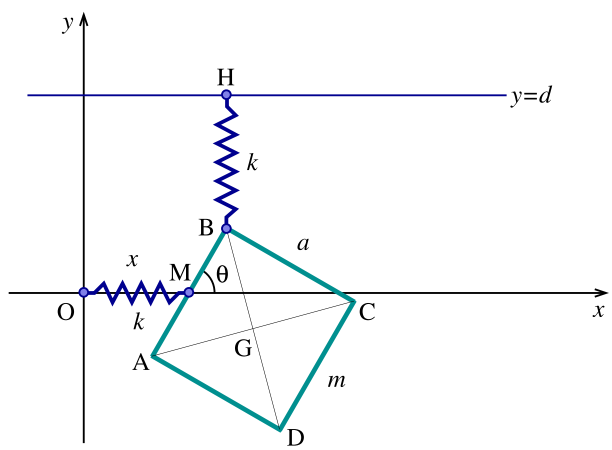

Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

Data la trasformazione

$$Q = \frac{1}{3}\,q^\alpha\,\left(1 - \frac{\gamma^2 p^2}{2}\right)$$
$$P = 2\,\gamma\,q^\beta\,p$$

dalle variabili q, p alle variabili Q, P. Dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica. (Si suggerisce, nel calcolo della funzione generatrice, di integrare le espressioni di $\frac{\partial F_2}{\partial q}$ e $\frac{\partial F_2}{\partial P}$, trovandone le soluzioni generali, e imporre che siano la stessa funzione; in alternativa, eseguire il calcolo dell'integrale di linea lungo una linea scelta in modo tale da rendere semplice il calcolo).

Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una particella di massa a riposo m_1 si muove lungo l'asse x con velocità v_1 ed urta una particella di massa m_2 a riposo nell'origine del sistema di coordinate. Nell'urto viene prodotta un'unica particella di massa M e velocità V. Sapendo che $v_1 = \frac{2}{3}c$ e $\frac{m_1}{M} = \frac{3}{4\sqrt{2}}$, determinare V e $\frac{m_2}{M}$.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 19 febbraio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_{\rm M} = x$, $y_B = \frac{a}{2}\sin\theta$, $x_{\rm G} = x + \frac{a}{2}\sin\theta$, $y_{\rm G} = -\frac{a}{2}\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_{\rm G}^2 + \dot{y}_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \frac{19}{12}a^2\,\dot{\theta}^2 + a\cos\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$\ddot{x} + \frac{a}{2}\cos\theta\,\ddot{\theta} - \frac{a}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{m}\,x,$$

$$\frac{19}{12}a^2\,\ddot{\theta} + \frac{a}{2}\cos\theta\,\ddot{x} = \frac{ka}{2m}\left(d - \frac{a}{2}\sin\theta\right)\cos\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = kx, \qquad \partial_\theta U = \frac{ka}{2}\left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)\cos\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} x = 0, \\ \left(\frac{a}{2}\sin\theta - d\right)\cos\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $x_1 = 0$ e $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $x_2 = 0$ e $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $x_{3,4} = 0$, $\cos\theta_{3,4} \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{2d}{a}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{2d}{a} \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \geq 2.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{ka}{2}\left(d - \frac{a}{2}\sin\theta\right)\sin\theta + \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0.$$

Poiché $\partial^2_{xx}U > 0$ e $\partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia anche $\partial^2_{\theta\theta}U > 0$.
Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\lambda < 2$.
La posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda > 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ si ha $\partial^2_{\theta\theta}U = \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta$, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $\lambda \geq 2$.
Riassumendo, per $0 < \lambda < 2$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile; per $\lambda \geq 2$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\sin\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\cos\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = m \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{19}{12}ma^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = \frac{ma}{2}\cos\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = k, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{ka^2}{4}\cos^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = 0.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{k}{m}\cos^2\theta - \frac{19}{3}\omega^2\right) - \cos^2\theta\,\omega^4 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$67\,\omega^4 - 85\,\omega^2 + 9 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{85 \pm \sqrt{4813}}{134} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 1.15,\;\; \omega_-^2 = 0.117.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.07$ e $\omega_- = 0.341$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q,P] = \frac{2}{3}\alpha\gamma\, q^{\alpha+\beta-1}\,(1 - \frac{\gamma^2\, p^2}{2}) + \frac{2}{3}\beta\gamma\, q^{\alpha+\beta-1}\gamma^2\, p^2 = 1.$$

che implica $\alpha+\beta = 1$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $\frac{2}{3}\,\alpha\,\gamma = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}$, $\beta = \frac{1}{3}$, $\gamma = \frac{9}{4}$.
Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna ricavare p e Q in funzione di q e P:

$$p = \frac{2\,P}{9\,q^{1/3}}$$
$$Q = \frac{1}{3}\,q^{2/3} - \frac{P^2}{24}.$$

Sappiamo che $dF_2(q,P) = p\,\mathrm{d}q + Q\,\mathrm{d}P$ e quindi:

$$F_2(q,P) = \int \frac{2\,P}{9\,q^{1/3}}dq + f(P) = \frac{P\,q^{2/3}}{3} + f(P)$$
$$F_2(q,P) = \int \left(\frac{1}{3}\,q^{2/3} - \frac{P^2}{24}\right)dP + g(q) = \frac{P\,q^{2/3}}{3} - \frac{P^3}{72} + g(q)$$

$\Rightarrow g(q) \equiv 0$ e $f(P) = -\frac{P^3}{72}$ (a meno di costanti additive) cosicché

$$F_2(q,P) = \frac{P\,q^{2/3}}{3} - \frac{P^3}{72}.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Per la conservazione dell'impulso,

$$m_1\gamma_1 v_1 = M\Gamma V\,.$$

Elevando al quadrato, e sapendo che $\gamma_1^2\frac{v_1^2}{c^2} = \gamma_1^2 - 1$, $\Gamma^2\frac{V^2}{c^2} = \Gamma^2 - 1$,

$$m_1^2(\gamma_1^2 - 1) = M^2(\Gamma^2 - 1)$$

ed essendo

$$\gamma_1^2 = \frac{1}{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} = \frac{9}{5} \quad \Rightarrow \quad \gamma_1^2 - 1 = \frac{4}{5}\,,$$
$$m_1^2 = \frac{9}{32}M^2\,,$$

si ha

$$\Gamma^2 - 1 = \frac{m_1^2(\gamma_1^2 - 1)}{M^2} = \frac{9}{40} \quad \Rightarrow \quad \Gamma = \frac{7}{2\sqrt{10}}\,,$$

e

$$V^2 = \frac{\Gamma^2 - 1}{\Gamma^2} = \frac{9}{49} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{3}{7}\,.$$

Per la conservazione dell'energia,

$$m_1\gamma_1 + m_2 = M\Gamma\,,$$

quindi

$$\frac{m_2}{M} = \Gamma - \frac{m_1}{M}\gamma_1 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}}\,.$$