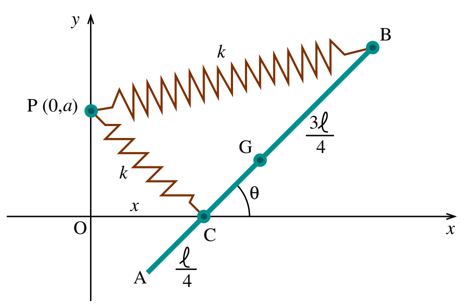
Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 21 giugno 2021
Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica Lagrangiana [14 punti].
In un piano orizzontale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxy. In tale piano si muove una sbarra omogenea di lunghezza ℓ e massa M. Il punto C situato a $\ell/4$ dall'estremo A della sbarra è vincolato a muoversi lungo l'asse x. La sbarra può ruotare liberamente attorno ad un asse passante per C e ortogonale al piano Oxy. Nel punto C e nell'altro estremo B della sbarra sono ancorate due molle ideali, di eguale costante elastica k e con lunghezza di riposo nulla, entrambe ancorate all'asse y nel punto di ordinata a.
Si assumano come variabili lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che il segmento CB forma con l'asse x.

1. Si scriva la funzione di Lagrange del sistema.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare di $a \in (-\infty, +\infty)$.
3. Ponendo ora $M = 1$, $k = 1$, $a = 3$, $\ell = 8\sqrt{3}$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si trovino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia della sbarra omogenea rispetto al suo centro di massa G è $I_G = \frac{1}{12}M\ell^2$.



2. Trasformazioni canoniche [6 punti].
Sia data la trasformazione dalle coordinate canoniche q, p alle coordinate:

$$Q = \beta \cosh p + q^\gamma (\sinh p)^3$$
$$P = \frac{q^\alpha}{4 \sinh p}$$

1. Trovare per quali valori di α, β, γ la trasformazione è canonica.
2. Per tali valori, trovare la funzione generatrice del quarto tipo, $F_4(p, P)$.

Si ricordi che $\cosh p = \frac{e^p + e^{-p}}{2}$ mentre $\sinh p = \frac{e^p - e^{-p}}{2}$.

3. Dilatazione dei tempi [5 punti].
Due astronavi partono dalla Terra nello stesso istante $t = 0$ muovendosi in versi opposti lungo la stessa direzione, la prima con velocità $v_1 = c/3$, la seconda con velocità $v_2 = c/2$. Ognuna di esse, un anno dopo la partenza (misurato da un orologio a bordo), invia un segnale luminoso verso Terra, ed inverte la direzione di moto. Determinare:

1. I tempi, misurati da un orologio a Terra, ai quali le due astronavi tornano a Terra.
2. I tempi, misurati da un orologio a Terra, ai quali vengono ricevuti i due segnali luminosi.

4. Dinamica relativistica [5 punti]. Si consideri una particella relativistica di massa propria m, inizialmente in quiete nell'origine di un dato sistema di riferimento inerziale. All'istante $t = 0$, alla particella viene applicata una forza $F(t) = f/(1 + \Gamma t)^2$ dipendente dal tempo e diretta nel verso positivo dell'asse x, con $f > 0$ e $\Gamma \geq 0$ costanti dimensionali.

1. Si determini la legge oraria della velocità $v(t)$ della particella per $t > 0$.
2. Si indichi con v_∞ il valore asintotico della velocità per $t \to \infty$. Per quale valore di Γ si ha $v_\infty = c$?
3. Si determini v_∞ per $mc\Gamma/f = 1/\sqrt{3}$.

Soluzioni della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 15 febbraio 2021

Proff. M. Bonvini, S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Meccanica lagrangiana.

1. Si ha $\mathrm{C} = (x, 0)$, $\mathrm{B} = (x + \frac{3}{4}\ell\cos\theta, \frac{3}{4}\ell\sin\theta)$, $\mathrm{G} = (x + \frac{1}{4}\ell\cos\theta, \frac{1}{4}\ell\sin\theta)$, quindi $v_{\mathrm{G}} = (\dot{x} - \frac{1}{4}\ell\sin\theta\dot{\theta}, \frac{1}{4}\ell\cos\theta\dot{\theta})$. Dato il momento di inerzia del corpo $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12}M\ell^2$, l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\ell\sin\theta\dot{\theta}\dot{x} + \frac{7}{48}\ell^2\dot{\theta}^2\right) .$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}k\left(2x^2 + \frac{3}{2}\ell(x\cos\theta - a\sin\theta)\right) + \text{costante} .$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$.
2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$U_x = k\left(2x + \frac{3}{4}\ell\cos\theta\right)$$
$$U_\theta = -\frac{3}{4}k\ell(x\sin\theta + a\cos\theta) .$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha $x = -\frac{3}{8}\ell\cos\theta$ e

$$\cos\theta\left(a - \frac{3}{8}\ell\sin\theta\right) = 0 .$$

La prima posizione di equilibrio è $\theta = \pi/2$, $x = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\theta = -\pi/2$, $x = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta = \frac{8a}{3\ell}$ e $x = \mp\frac{1}{8}\sqrt{9\ell^2 - 64a^2}$, che esistono solo se $|a| \leq \frac{3}{8}\ell$.
Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$U_{xx} = 2k, \qquad U_{x\theta} = -\frac{3}{4}k\ell\sin\theta, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{3}{4}k\ell(a\sin\theta - x\cos\theta) .$$

Siccome $U_{xx} > 0$, la stabilità si valuta dal segno del determinante hessiano

$$\det\mathbb{U} = \frac{3}{2}k^2\ell\left(a\sin\theta - x\cos\theta - \frac{3}{8}\ell\sin^2\theta\right) .$$

Si ha quindi che la prima posizione di equilibrio è stabile per $a > \frac{3}{8}\ell$.
La seconda posizione di equilibrio è stabile per $a < -\frac{3}{8}\ell$.
Le posizioni $3, 4$ infine sono stabili per $|a| < \frac{3}{8}\ell$.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la terza e la quarta. La matrice Hessiana dell'energia cinetica è

$$\mathbb{T} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 28 \end{pmatrix}$$

La matrice Hessiana dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 54 \end{pmatrix}$$

L'equazione secolare $\det|\mathbb{U} - \omega^2\mathbb{T}| = 0$ dà

$$24\,\omega^4 - 86\,\omega^2 + 72 = 0$$

che ammette due soluzioni positive,

$$\omega_+^2 = \frac{9}{4}, \qquad \omega_-^2 = \frac{4}{3}\,.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \frac{3}{2}$ e $\omega_- = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

2. Trasformazioni canoniche.

1. Imponendo la condizione $[Q,P]_{q,p} = 1$ otteniamo:

$$\begin{aligned}[Q,P]_{q,p} &= -\gamma q^{\gamma-1}(\sinh p)^3 \frac{q^\alpha \cosh p}{4(\sinh p)^2} - (\beta \sinh p + 3q^\gamma (\sinh p)^2 \cosh p)\frac{\alpha q^{\alpha-1}}{4\sinh p} \\ &= \left(-\frac{\gamma}{4} - \frac{3\alpha}{4}\right) q^{\alpha+\gamma-1} \sinh p \cosh p - \frac{\beta\alpha}{4} q^{\alpha-1} = 1,\end{aligned}$$

   da cui segue $\alpha = 1$, $\beta = -4$ e $\gamma = -3$.

2. Sappiamo che $\mathrm{d}F_4(p,P) = -q\,\mathrm{d}p + Q\,\mathrm{d}P$, dobbiamo dunque invertire la trasformazione canonica:

$$\begin{aligned} q &= 4P\sinh p \\ Q &= -4\cosh p + \frac{1}{64\,P^3} \end{aligned} \tag{1}$$

   da cui segue che

$$\begin{aligned} F_4(p,P) &= -\int q\,dp = -4P\cosh p + f(P) \\ F_4(p,P) &= \int Q\,dP = -4P\cosh p - \frac{1}{128\,P^2} + g(p) \end{aligned}$$

   che implica $f(P) = -\frac{1}{128\,P^2}$ e $g(p) = 0$, ovvero

$$F_4(p,P) = -4P\cosh p - \frac{1}{128\,P^2}$$

3. Dilatazione dei tempi.

Sia $\bar\tau = 1$ anno. La prima astronave inverte il senso di marcia al tempo

$$t_1 = \frac{\bar\tau}{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\,\bar\tau = 1.061\,\bar\tau\,.$$

La seconda astronave inverte il senso di marcia al tempo

$$t_2 = \frac{\bar\tau}{\sqrt{1 - v_2^2/c^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\bar\tau = 1.155\,\bar\tau\,.$$

1. I tempi di arrivo sono $2t_1 = 3/\sqrt{2}$ anni $= 2.122$ anni e $2t_2 = 4/\sqrt{3}$ anni $= 2.310$ anni.
2. Le posizioni di inversione di marcia sono $x_1 = v_1 t_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,c\bar\tau$ e $x_2 = v_2 t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,c\bar\tau$. I tempi di ricevimento dei segnali sono

$$t_1 + x_1/c = \sqrt{2}\,\bar\tau = 1.414 \;\; \text{anni}$$

   e

$$t_2 + x_2/c = \sqrt{3}\,\bar\tau = 1.732 \;\; \text{anni.}$$

4. Dinamica relativistica.

1. L'impulso trasferito alla particella fino al tempo t è
$$I(t) = \int_0^t F(s)\,\mathrm{d}s = f\int_0^t \frac{\mathrm{d}s}{(1+\Gamma s)^2} = \frac{ft}{1+\Gamma t}.$$
Integrando l'equazione del moto relativistica (lungo l'asse x)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = F(t),$$
con la condizione iniziale $v(t=0)=0$, si ha
$$\frac{mv(t)}{\sqrt{1-\frac{[v(t)]^2}{c^2}}} = I(t) \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = \frac{cI(t)}{\sqrt{(mc)^2+[I(t)]^2}} = \frac{cft}{\sqrt{[mc(1+\Gamma t)]^2+(ft)^2}}.$$

2. Prendendo il limite per $t\to\infty$ si trova
$$v_\infty = \frac{cf}{\sqrt{(mc\Gamma)^2+f^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+\left(\frac{mc\Gamma}{f}\right)^2}}.$$
Per $\Gamma = 0$ l'impulso trasferito alla particella diverge per $t\to\infty$ e si ha $v_\infty = c$, mentre per $\Gamma > 0$ l'impulso trasferito alla particella converge per $t\to\infty$ e si ha $v_\infty < c$.

3. Per il valore dato dalla traccia, $mc\Gamma/f = 1/\sqrt{3}$, si ha $v_\infty = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.