Corso di Meccanica Statistica Compito del 23/06/2023

Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, contenute nella regione unidimensionale $q \geq 0$ (q è una coordinata cartesiana, con le dimensioni di una lunghezza), con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p, q) = c|p| + Aq \ ,$$

dove $c > 0$ e $A > 0$ sono parametri dimensionali. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. **Meccanica Statistica Classica**
Assumendo che sia applicabile la statistica classica:
a. [3 punti] Calcolare l'energia interna per particella $u = U/N$ in funzione di T.
b. [4 punti] Detti $N_>$ e $N_<$, rispettivamente, il numero di particelle con $q \geq \ell$ e $0 \leq q < \ell$, dove $\ell > 0$ è un parametro con le dimensioni di una lunghezza, calcolare il rapporto $N_>/N_<$ in funzione di T; determinare i valori asintotici di tale rapporto per $\ell \gg \kappa_\mathrm{B}T/A$ e $\ell \ll \kappa_\mathrm{B}T/A$.
c. [3 punti] Calcolare la probabilità P_K che esattamente K particelle abbiano impulso $|p| \geq \kappa_\mathrm{B}T/c$.

2. **Bosoni**
Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
a. [4 punti] Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e determinare la temperatura di condensazione T_0.
b. [3 punti] Calcolare l'energia interna per particella $u = U/N$ in funzione di T, per $T \leq T_0$.
c. [3 punti] Calcolare l'espressione asintotica del numero di particelle $N_>$ con $|p| > \alpha\kappa_\mathrm{B}T/c$, per $0 < T \leq T_0$ e $\alpha \gg 1$.

3. **Fermioni**
Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2 e si trovi a $T = 0$:
a. [3 punti] Determinare il valore dell'energia di Fermi ϵ_F in corrispondenza del quale il numero di particelle vale $N = \frac{2AL^2}{hc}$, dove $L > 0$ è un parametro con le dimensioni di una lunghezza.
b. [4 punti] Detti $N_>$ e $N_<$, rispettivamente, il numero di particelle con $q \geq \ell$ e $0 \leq q < \ell$, dove $\ell > 0$ è un parametro con le dimensioni di una lunghezza, calcolare il rapporto $N_>/N_<$ in funzione di $\epsilon_F > 0$; determinare i valori asintotici di tale rapporto per $\ell \gg \epsilon_\mathrm{F}/A$ e $\ell \ll \epsilon_\mathrm{F}/A$.
c. [3 punti] Calcolare la frazione $n_<$ di particelle con impulso $|p| \leq \frac{\epsilon_\mathrm{F}}{2c}$, in funzione di $\epsilon_\mathrm{F} > 0$.

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{d}t\, t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \mathrm{d}t\, \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}$.

Risposte

1.a) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti la funzione di partizione canonica è $Z_N = Z_1^N/N! \approx (Z_1\,\mathrm{e}/N)^N$ dove Z_1 è la funzione di partizione di singola particella. L'energia interna per particella assume dunque l'espressione $u = U/N = -\partial(\ln Z_1)/\partial\beta$, con $\beta \equiv (k_\mathrm{B}T)^{-1}$. Abbiamo

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}p\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{-\beta H(p,q)} = \frac{2}{h}\int_0^{\infty}\mathrm{d}p\,\mathrm{e}^{-\beta cp}\int_0^{\infty}\mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{-\beta Aq} = \frac{2}{hcA\beta^2}.$$

Quindi,

$$u = -\frac{\partial\ln Z_1}{\partial\beta} = 2k_BT.$$

1.b) Abbiamo

$$\frac{N_>}{N_<} = \frac{\int_\ell^\infty \mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{-\beta Aq}}{\int_0^\ell \mathrm{d}q\,\mathrm{e}^{-\beta Aq}} = \frac{e^{-\beta A\ell}}{1-e^{-\beta A\ell}}.$$

Per $\beta A\ell \gg 1$ si ha $N_>/N_< \approx e^{-\beta A\ell} + O(e^{-2\beta A\ell})$; $\beta A\ell \ll 1$ si ha $N_>/N_< \approx (\beta A\ell)^{-1}[1 + O(\beta A\ell)]$.

1.c) La probabilità che una particella abbia impulso $|p| \geq \kappa_\mathrm{B}T/c$ è

$$r = \frac{\int_{\kappa_\mathrm{B}T/c}^\infty \mathrm{d}p\,\mathrm{e}^{-\beta cp}}{\int_0^\infty \mathrm{d}p\,\mathrm{e}^{-\beta cp}} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Quindi

$$P_K = \binom{N}{K} r^K(1-r)^{N-K} = \binom{N}{K}\mathrm{e}^{-N}(\mathrm{e}-1)^{N-K}.$$

2.a) Calcoliamo innanzitutto la densità degli stati

$$G(\epsilon) = \frac{2}{h}\int_0^\infty \mathrm{d}p\int_0^\infty \mathrm{d}q\,\delta(\epsilon - cp - Aq) = \frac{2}{Ah}\int_0^\infty \mathrm{d}p\,\theta(\epsilon - cp) = \frac{2}{ch}\int_0^\infty \mathrm{d}q\,\theta(\epsilon - Aq) = \frac{2}{hcA}\epsilon\,\theta(\epsilon),$$

dove i termini intermedi danno le distribuzioni congiunte delle variabili ϵ, p o ϵ, q, che ci serviranno in seguito. È evidente che l'energia minima di una particella è $\epsilon_\mathrm{min} = 0$.
Se il sistema è composto da N Bosoni, posto $\beta_0 \equiv (k_\mathrm{B}T_0)^{-1}$, la condizione di condensazione è

$$N = \frac{2}{hcA}\int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon\,\frac{\epsilon}{\mathrm{e}^{\beta_0\epsilon}-1} = \frac{2(k_\mathrm{B}T_0)^2}{hcA}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{t}{\mathrm{e}^t - 1} = \frac{2(k_\mathrm{B}T_0)^2}{hcA}\Gamma(2)\zeta(2) = \frac{2(k_\mathrm{B}T_0)^2}{hcA}\zeta(2).$$

La convergenza dell'integrale dimostra che la condensazione esiste e avviene alla temperatura

$$T_0 = \frac{1}{k_\mathrm{B}}\sqrt{\frac{hcAN}{2\zeta(2)}}.$$

2.b) L'energia interna per $T \leq T_0$ è quella delle sole particelle fuori dal condensato, quindi

$$u = \frac{2}{hcAN}\int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon\,\frac{\epsilon^2}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon}-1} = \frac{2(k_\mathrm{B}T)^3}{hcAN}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,\frac{t^2}{\mathrm{e}^t-1} = \frac{2(k_\mathrm{B}T)^3}{hcAN}\Gamma(3)\zeta(3) = \frac{2\zeta(3)}{\zeta(2)}\frac{k_\mathrm{B}T^3}{T_0^2}.$$

2.c) Per $0 < T \leq T_0$, le particelle con $|p| > \alpha\kappa_{\mathrm{B}}T/c$ sono solo quelle fuori dal condensato, quindi

$$N_> = \frac{2}{Ah}\int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon\,\frac{1}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon}-1}\int_{\alpha\kappa_{\mathrm{B}}T/c}^\infty \mathrm{d}p\,\theta(\epsilon - cp) = \frac{2}{hcA}\int_{\alpha\kappa_{\mathrm{B}}T}^\infty \mathrm{d}\epsilon\,\frac{\epsilon - \alpha\kappa_{\mathrm{B}}T}{\mathrm{e}^{\beta\epsilon}-1}$$

$$\approx \frac{2}{hcA}\int_{\alpha\kappa_{\mathrm{B}}T}^\infty \mathrm{d}\epsilon(\epsilon - \alpha\kappa_{\mathrm{B}}T)\,\mathrm{e}^{-\beta\epsilon} = \frac{2(\kappa_{\mathrm{B}}T)^2}{hcA}\,\mathrm{e}^{-\alpha}\int_0^\infty \mathrm{d}t\,t\,\mathrm{e}^{-t} = \frac{2(\kappa_{\mathrm{B}}T)^2}{hcA}\,\mathrm{e}^{-\alpha}.$$

3.a) Il numero di fermioni a temperatura nulla è dato da

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon\,G(\epsilon) = \frac{4}{hcA}\theta(\epsilon_{\mathrm{F}})\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon\,\epsilon = \frac{2\epsilon_{\mathrm{F}}^2}{hcA}\theta(\epsilon_{\mathrm{F}})$$

dove ϵ_{F} è l'energia di Fermi e un fattore 2 viene dalla degenerazione di spin. Ponendo $N = \frac{2AL^2}{hc}$, si ricava $\epsilon_{\mathrm{F}} = AL$.

3.b) Assunto $\epsilon_{\mathrm{F}} > 0$, si ha

$$\frac{N_>}{N_<} = \frac{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon \int_\ell^\infty \mathrm{d}q\,\theta(\epsilon - Aq)}{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon \int_0^\ell \mathrm{d}q\,\theta(\epsilon - Aq)} = \frac{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon\,(\epsilon - A\ell)\,\theta(\epsilon - A\ell)}{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon\,[\epsilon\,\theta(A\ell - \epsilon) + A\ell\,\theta(\epsilon - A\ell)]}$$

$$= \frac{(\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell)^2\,\theta(\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell)}{(A\ell)^2\,\theta(\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell) + \epsilon_{\mathrm{F}}^2\,\theta(A\ell - \epsilon_{\mathrm{F}}) + 2A\ell(\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell)\,\theta(\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell)}$$

$$= \frac{(\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell)^2\,\theta(\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell)}{\epsilon_{\mathrm{F}}^2\,\theta(A\ell - \epsilon_{\mathrm{F}}) + A\ell(2\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell)\,\theta(\epsilon_{\mathrm{F}} - A\ell)}.$$

Evidentemente, per $\epsilon_{\mathrm{F}} \ll A\ell$ si ha $N_>/N_< = 0$ e per $\epsilon_{\mathrm{F}} \gg A\ell$ si ha $N_>/N_< \approx \frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{2A\ell}\left[1 + O\left(\frac{A\ell}{\epsilon_{\mathrm{F}}}\right)\right]$.

3.c) Si ha

$$n_< = \frac{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon \int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}/(2c)} \mathrm{d}p\,\theta(\epsilon - cp)}{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon \int_0^\infty \mathrm{d}p\,\theta(\epsilon - cp)} = \frac{\int_0^{\epsilon_{\mathrm{F}}} \mathrm{d}\epsilon\,\left[\epsilon\,\theta\left(\frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{2} - \epsilon\right) + \frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{2}\,\theta\left(\epsilon - \frac{\epsilon_{\mathrm{F}}}{2}\right)\right]}{\frac{1}{2}\epsilon_{\mathrm{F}}^2} = \frac{\frac{1}{8}\epsilon_{\mathrm{F}}^2 + \frac{1}{4}\epsilon_{\mathrm{F}}^2}{\frac{1}{2}\epsilon_{\mathrm{F}}^2} = \frac{3}{4}.$$