**Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 giugno 2019**
**Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto**

## Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.

In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali O$xz$, con $z$ verticale discendente, si muove una guida circolare rigida e omogenea, di centro G, raggio $R$ e massa $3m$. Sul diametro $AB$ della guida è saldata una barra rigida e omogenea di massa $m$. Il punto D dell'asta, a distanza $d = \frac{1}{2}R$ da A, è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida rettilinea coincidente con l'asse O$z$, e il sistema rigido composto dalla guida circolare e dalla barra è libero di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano O$xz$ e passante per D (si veda la Fig. 1). Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OD}$, con $k > 0$, $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HB}$, con H proiezione ortogonale di B sull'asse O$x$, e la forza peso, con $g > 0$ intensità dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane la coordinata $z$ di D e l'angolo $\theta$ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse O$z$.
1. Si scriva la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema; non è richiesto di ricavare le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR} > 0$.
3. Ponendo ora $k = 4$, $m = 1$, $R = 4$, $g = 9$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia del sistema rigido composto dalla guida circolare e dalla barra rispetto al suo centro di massa G è $I_\mathrm{G} = \frac{10}{3}mR^2$.

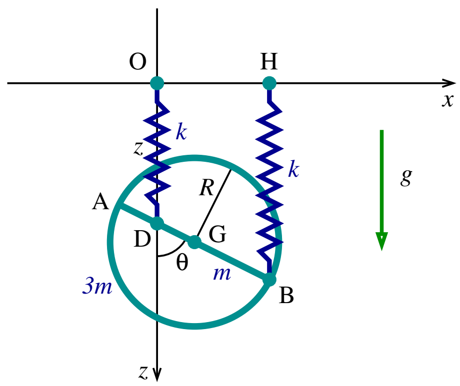


Fig. 1

## Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.

È data la trasformazione

$$p = \frac{q^{\alpha/2}}{2Q^{1/2}}$$
$$P = \frac{B\,q^{\left(\frac{1}{3}+\frac{\alpha\delta}{2}\right)}}{(4Q)^{\delta/2}}$$

dalle variabili $q$, $Q$ alle variabili $p$, $P$.
1. Dire per quali valori dei parametri reali $\alpha, \delta, B$ la trasformazione è canonica.
2. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_3(p, Q)$ della trasformazione canonica.

## Esercizio 3: Relatività ristretta.

Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sono assegnati nello spazio-tempo di Minkowski $(ct, x, y, z)$ i tre eventi $E_1 = (1, 1, 0, 0)$, $E_2 = (2, 1, 4, 0)$ e $E_3 = (5, 1, 0, 3)$.
1. Determinare la velocità $\mathbf{v_1} = (v_{1x}, v_{1y}, v_{1z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi $E_1$, $E_2$ sono simultanei.
2. Determinare la velocità $\mathbf{v_2} = (v_{2x}, v_{2y}, v_{2z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi $E_1$, $E_3$ avvengono nella stessa posizione.
3. Determinare la velocità $\mathbf{v_3} = (v_{3x}, v_{3y}, v_{3z})$ di un sistema di riferimento in cui gli eventi $E_2$, $E_3$ sono simultanei.

**Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 24 giugno 2019**
**Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto**

**Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.**
1. Si ha $z_{\rm D} = z$, $z_B = z + \frac{3}{2}R\cos\theta$, $x_{\rm G} = \frac{1}{2}R\sin\theta$, $z_{\rm G} = z + \frac{1}{2}R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}4m\left(\dot x_{\rm G}^2 + \dot z_{\rm G}^2\right) + \frac{1}{2}I_{\rm G}\,\dot\theta^2 = \frac{1}{2}m\left(4\dot z^2 + \frac{13}{3}R^2\,\dot\theta^2 - 4R\sin\theta\,\dot\theta\,\dot z\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kz_D^2 + \frac{1}{2}kz_B^2 - 4mgz_G = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)^2 - 4mg\left(z + \frac{1}{2}R\cos\theta\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$. Per completezza, si riportano qui di seguito le equazioni del moto (non richieste dalla traccia):

$$2m\left(2\ddot z - R\sin\theta\,\ddot\theta - R\cos\theta\,\dot\theta^2\right) = -k\left(2z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right) + 4mg,$$

$$m\left(\frac{13}{3}R^2\,\ddot\theta - 2R\sin\theta\,\ddot z\right) = \frac{3}{2}kR\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)\sin\theta - 2mgR\sin\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_z U = k\left(2z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right) - 4mg, \qquad \partial_\theta U = 2mgR\sin\theta - \frac{3}{2}kR\left(z + \frac{3}{2}R\cos\theta\right)\sin\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} 4z + 3R\cos\theta - 8\lambda R = 0, \\ (6z + 9R\cos\theta - 8\lambda R)\sin\theta = 0, \end{cases}$$

dove si è introdotto il parametro adimensionale $\lambda = \frac{mg}{kR} > 0$ suggerito dalla traccia.
La prima posizione di equilibrio è $z_1 = \frac{8\lambda-3}{4}R$ e $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $z_2 = \frac{8\lambda+3}{4}R$ e $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$.
Si hanno poi due posizioni di equilibrio equivalenti, $z_{3,4} = \frac{8}{3}\lambda R$, $\cos\theta_{3,4} = -\frac{8}{9}\lambda$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$-\frac{8}{9}\lambda \geq -1 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \leq \frac{9}{8}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{zz}U = 2k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{1}{4}kR\cos\theta\,(8\lambda R - 6z - 9R\cos\theta) + \frac{9}{4}kR^2\sin^2\theta, \quad \partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = -\frac{3}{2}kR\sin\theta.$$

Poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ e nelle posizioni 1,2 $\partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che sia anche $\partial^2_{\theta\theta}U > 0$. Si ha quindi che la posizione di equilibrio $(x_1, \theta_1)$ non è stabile per nessun $\lambda \geq 0$, mentre la posizione di equilibrio $(x_2, \theta_2)$ è stabile per $\lambda > \frac{9}{8}$.
Nelle posizioni $3, 4$ il determinante della matrice Hessiana vale $\frac{9}{4}k^2R^2\sin^2\theta \geq 0$, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $\lambda \leq \frac{9}{8}$.
Riassumendo, per $0 < \lambda \leq \frac{9}{8}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda > \frac{9}{8}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile e la seconda stabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\lambda = \frac{9}{16} < \frac{9}{8}$, quindi le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\cos\theta_{3,4} = -\frac{1}{2}$ e $\sin\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot z\dot z} = 4m, \qquad T_{\dot\theta\dot\theta} = \frac{13}{3}mR^2, \qquad T_{\dot z\dot\theta} = T_{\dot\theta\dot z} = -2mR\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{zz} = 2k, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{9}{4} k R^2 \sin^2\theta, \qquad U_{z\theta} = U_{\theta z} = -\frac{3}{2} k R \sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det |U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2\Omega^2 - 4\omega^2\right)\left(\frac{9}{4}\sin^2\theta\,\Omega^2 - \frac{13}{3}\omega^2\right) - \sin^2\theta\left(\frac{3}{2}\Omega^2 - 2\omega^2\right)^2 = 0,$$

dove $\Omega^2 \equiv \frac{k}{m}$. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$688\,\omega^4 - 524\,\Omega^2\,\omega^2 + 81\,\Omega^4 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{262 \pm \sqrt{12916}}{688}\,\Omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 \approx 0.5460\,\Omega^2,\ \ \omega_-^2 \approx 0.2156\,\Omega^2.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ \approx 0.739\,\Omega$ e $\omega_- \approx 0.464\,\Omega$. Per i valori assegnati dalla traccia si ha $\Omega = 2$.

**Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.**
1. Esprimendo $Q, P$ in funzione di $q, p$ otteniamo:

$$Q = \frac{1}{4} q^\alpha p^{-2}$$
$$P = B q^{1/3} p^\delta$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q, P]_{q,p}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q, P] = \frac{B}{4}(\alpha\delta + \frac{2}{3}) q^{(\alpha - \frac{2}{3})} p^{(\delta - 3)} = 1.$$

che implica $\alpha = \frac{2}{3}$, $\delta = 3$, $B = \frac{3}{2}$.
2. Per ottenere $F_3(p, Q)$ bisogna ricavare $q$ e $P$ in funzione di $p$ e $Q$, in corrispondenza dei valori trovati per $\alpha, \delta, B$:

$$q = 8 Q^{3/2} p^3$$
$$P = 3 Q^{1/2} p^4$$

Sappiamo che $\mathrm{d}F_3 = -q\,\mathrm{d}p - P\,\mathrm{d}Q$ e quindi, scegliendo per esempio la spezzata $(0,0) \longrightarrow (p, 0) \longrightarrow (p, Q)$ come cammino d'integrazione, si ottiene

$$F_3(p, Q) = -2 Q^{3/2} p^4.$$

**Esercizio 3: Relatività ristretta.**
Le separazioni tra gli eventi sono

$$\begin{aligned} \vec{E}_{12} &= (1, 0, 4, 0) && \text{genere spazio (spacelike)},\\ \vec{E}_{13} &= (4, 0, 0, 3) && \text{genere tempo (timelike)},\\ \vec{E}_{23} &= (3, 0, -4, 3) && \text{genere spazio (spacelike)}. \end{aligned}$$

1. Il riferimento $(ct', x', y', z')$ in cui $E_1$, $E_2$ sono simultanei è in moto con velocità $\vec{v}_1 = (0, v_1, 0)$, tale che

$$c\Delta t' = \gamma_1 \left(c\Delta t - \frac{v_1}{c}\Delta y\right) = \gamma_1 \left(1 - \frac{4 v_1}{c}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{c}{4}\,.$$

2. Il riferimento $(ct'', x'', y'', z'')$ in cui $E_1$, $E_3$ avvengono nella stessa posizione è in moto con velocità $\vec{v}_2 = (0, 0, v_2)$, tale che

$$\Delta z'' = \gamma_2(\Delta z - v_2 \Delta t) = \gamma_2 \left(3 - \frac{4 v_2}{c}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{3}{4} c\,.$$

3. Un possibile riferimento $(ct''', x''', y''', z''')$ in cui $E_2$, $E_3$ sono simultanei è in moto con velocità $\vec{v}_3 = (0, v_3, 0)$, tale che

$$c\Delta t''' = \gamma_1 \left( c\Delta t - \frac{v_3}{c} \Delta y \right) = \gamma_1 \left( 3 + \frac{4v_3}{c} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = -\frac{3}{4} c\,.$$

Un'altra possibile soluzione prevede che il moto avvenga sul piano $yz$, dal punto $(0,0)$, al punto $(-4,3)$. Ruotando gli assi sul piano $(y,z)$ e chiamando $\eta$ l'asse che passa per $(0,0)$ e $(-4,3)$, abbiamo $\Delta\eta = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$. Allora il riferimento $(ct''', x''', y''', z''')$ in cui $E_2$, $E_3$ sono simultanei è in moto con velocità la cui unica componente non nulla è $v_\eta$, lungo l'asse $\eta$, tale che

$$c\Delta t''' = \gamma_\eta \left( c\Delta t - \frac{v_\eta}{c} \Delta\eta \right) = \gamma_\eta \left( 3 - \frac{5v_\eta}{c} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v_\eta = \frac{3}{5} c\,.$$

Riproiettando sul piano $xy$, si trova che il sistema è in moto con velocità $\vec{v}_3\,' = (0, v_{3y}, v_{3z})$, tale che

$$v_{3y} = v_\eta \, \frac{(-4)}{5} = -\frac{12}{25} c\,, \qquad\qquad v_{3z} = v_\eta \, \frac{3}{5} = \frac{9}{25} c\,.$$