Corso di Meccanica Statistica
Compito del 24/06/2022
Proff. S. Caprara, I. Giardina e M. Grilli

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa M, non interagenti, che si muovono nella regione piana A: $[-L \leq x \leq L; -\infty < y < \infty]$, con Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2} M \Omega^2 (x + y)^2,$$

dove $p = |\boldsymbol{p}|$ e $\Omega > 0$ è un parametro con le dimensioni di una frequenza. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:

1.a) calcolare il potenziale chimico μ;
1.b) calcolare in calore specifico a volume costante C_V;
1.c) calcolare l'entropia microcanonica $S(E)$ in funzione dell'energia E.

2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:

2.a) dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e calcolare la temperatura di transizione T_0;
2.b) calcolare la frazione media di particelle che si trovano nello stato fondamentale a $T = \frac{1}{2} T_0$.

3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2 e si trovi a $T = 0$:

3.a) determinare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione del numero N di particelle;
3.b) calcolare il valore medio di x^2.

• Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta = 1/T$.

Risposte

1.a) Il potenziale chimico può essere calcolato dall'energia libera F mediante la relazione $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}\big|_{V,T}$. Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z_N = Z_1^N/N! \approx (Z_1 \mathrm{e}/N)^N$ dove Z_1 è la funzione di partizione di singola particella. Quindi $F = -T \ln Z_N = -TN \ln(Z_1 \mathrm{e}/N)$. Inoltre

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}}{h^2}\,\mathrm{e}^{-\beta H(\mathbf{q},\mathbf{p})} = \frac{1}{h^2}\int \mathrm{d}^2\boldsymbol{p}\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2M}p^2}\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}y\,\mathrm{e}^{-\frac{\beta M\Omega^2}{2}(x+y)^2} \\ &= \left(\frac{2\pi M}{h^2\beta}\right)2L\sqrt{\frac{2\pi}{\beta M\Omega^2}} = \frac{2^{5/2}\pi^{3/2}M^{1/2}L}{h^2\Omega\beta^{3/2}}. \end{aligned}$$

Quindi, siccome

$$\mu = -T\,\frac{\partial}{\partial N}N\ln\frac{Z_1\mathrm{e}}{N}\bigg|_{V,T} = -T\ln\frac{Z_1\mathrm{e}}{N} + T = -T\ln\frac{Z_1}{N},$$

usando l'espressione di Z_1, si ottiene

$$\mu = T\ln\frac{h^2\Omega N}{2^{5/2}\pi^{3/2}M^{1/2}LT^{3/2}}.$$

1.b) L'energia media del sistema E si ottiene dalla funzione di partizione canonica Z_N utilizzando la relazione $E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_N = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\ln Z_1$. Da cui si ha

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2}T.$$

Il calore specifico è

$$C_V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\frac{E}{N} = \frac{3}{2}$$

1.c) L'entropia microcanonica può essere ottenuta mediante la trasformata di Legendre

$$S(E) = \beta E - \beta F(\beta)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\beta F(\beta)\right] = E$$

dove F è l'energia libera canonica, eliminando β in funzione di E dalla seconda relazione. Utilizzando i risultati del punto precedente otteniamo

$$\begin{gathered} S(E) = \frac{3N}{2} + N\,\ln\frac{2^{5/2}\pi^{3/2}\mathrm{e}M^{1/2}L}{h^2\Omega N\beta^{3/2}}\bigg|_{\beta=\frac{2N}{3E}} = \\ N\ln\left[\frac{2^{5/2}\pi^{3/2}\mathrm{e}^{5/2}M^{1/2}L}{h^2\Omega N}\left(\frac{2E}{3N}\right)^{3/2}\right] = \\ N\ln\frac{16\pi^{3/2}\mathrm{e}^{5/2}M^{1/2}LE^{3/2}}{3^{3/2}h^2\Omega N^{5/2}}. \end{gathered}$$

2.a) Se il sistema è composto da Bosoni, il numero medio di particelle a temperatura T è pari a $N = N_0 + \widetilde{N}$, dove N_0 è il numero medio di particelle nello stato condensato e $\widetilde{N}$ è il numero medio di particelle fuori dal condensato, dato da

$$\widetilde{N} = \int_{\epsilon_{min}}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon \, \frac{G(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1},$$

dove $G(\epsilon)$ è la densità degli stati, $\mu \leq \epsilon_{min}$ (l'uguaglianza ha luogo in presenza del condensato) e ϵ_{min} è il valore minimo dell'energia di una particella. Nel caso in esame, $\epsilon_{min} = 0$. La condizione affinché esista la condensazione a $T = T_0$ è che

$$N = \int_{\epsilon_{min}}^{\infty} \mathrm{d}\epsilon \, \frac{G(\epsilon)}{\mathrm{e}^{\beta_0(\epsilon-\epsilon_{min})} - 1} < \infty,$$

dove $\beta_0 = 1/T_0$ e

$$G(\epsilon) = \int \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}}{h^2}\,\delta\left[H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) - \epsilon\right] =$$

$$\frac{\pi}{h^2}\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_0^{\infty}\mathrm{d}p^2\delta\left[\frac{p^2}{2M} + \frac{M\Omega^2}{2}(x+y)^2 - \epsilon\right] =$$

$$\frac{2\pi M}{h^2}\int_{-L}^{L}\mathrm{d}x\int_{-x-\sqrt{2\epsilon/M\Omega^2}}^{-x+\sqrt{2\epsilon/M\Omega^2}}\mathrm{d}y\,\theta(\epsilon) = \frac{2^{7/2}\pi M^{1/2}L}{h^2\Omega}\sqrt{\epsilon}\,\theta(\epsilon).$$

Di conseguenza, la condizione di condensazione diventa

$$N = \frac{2^{7/2}\pi M^{1/2}L}{h^2\Omega}\int_0^{\infty}\mathrm{d}\epsilon\,\frac{\sqrt{\epsilon}}{\mathrm{e}^{\beta_0\epsilon} - 1} = \frac{2^{7/2}\pi M^{1/2}L}{h^2\Omega}\xi\left(\frac{3}{2}\right)T_0^{3/2} < \infty,$$

dove $\xi(\frac{3}{2}) \equiv \int_0^{\infty}\mathrm{d}z\,z^{1/2}/(\mathrm{e}^z - 1) = \Gamma(\frac{3}{2})\zeta(\frac{3}{2}) \approx 2.315$. Quindi, esiste la condensazione e

$$T_0 = \left[\frac{h^2\Omega N}{2^{7/2}\pi M^{1/2}\xi\left(\frac{3}{2}\right)L}\right]^{2/3}$$

2.b) Dal punto precedente si ottiene che, per $T < T_0$,

$$N_0(T) = N - \widetilde{N}(\mu = 0, T) = N - \frac{2^{7/2}\pi M^{1/2}L}{h^2\Omega}\xi\left(\frac{3}{2}\right)T^{3/2} = N\left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right],$$

per cui

$$\frac{N_0(T = \frac{1}{2}T_0)}{N} = 1 - 2^{-3/2} \approx 0.65.$$

3.a) L'energia del sistema non dipende dal valore dello spin delle particelle, quindi il numero totale di particelle è

$$N = 2\int_0^{\epsilon_F} \mathrm{d}\epsilon\, G(\epsilon) = \frac{2^{9/2}\pi M^{1/2}L}{h^2\Omega}\int_0^{\epsilon_F} \mathrm{d}\epsilon\, \sqrt{\epsilon} = \frac{2^{11/2}\pi M^{1/2}L}{3h^2\Omega}\epsilon_F^{3/2},$$

con $\epsilon_F \geq \epsilon_{min} = 0$. Invertendo, otteniamo il risultato richiesto,

$$\epsilon_F = \left(\frac{3h^2\Omega N}{2^{11/2}\pi M^{1/2}L}\right)^{2/3}.$$

3.b) l valore medio di x^2 a temperatura nulla è dato da

$$\langle x^2\rangle = \frac{2}{N}\int_0^{\epsilon_F} \mathrm{d}\epsilon \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, G(\epsilon, x)x^2,$$

dove il fattore 2 è dovuto alla degenerazione di spin e

$$G(\epsilon, x) = \int \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{p}'\,\mathrm{d}^2\boldsymbol{q}'}{h^2}\delta\left[H(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{q}') - \epsilon\right]\delta(x' - x) = \frac{2^{5/2}\pi M^{1/2}}{h^2\Omega}\sqrt{\epsilon}\,\theta(\epsilon)\,\theta(L^2 - x^2),$$

(vedi punto 2.a). Dato che $G(\epsilon, x)$ non dipende da x nel dominio $-L \leq x \leq L$, si ha facilmente che

$$2\int_0^{\epsilon_F} \mathrm{d}\epsilon\, G(\epsilon, x) = \frac{N}{2L},$$

quindi

$$\langle x^2\rangle = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \mathrm{d}x\, x^2 = \frac{1}{3}L^2.$$