Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 25 giugno 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano verticale è fissato un sistema di assi cartesiani Oxz, con l'asse z verticale discendente. In tale piano si muovono un punto materiale P di massa m, vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida inclinata coincidente con la retta $z = x$, e un'asta rigida e omogenea AB, di massa $3m$ e lunghezza L, il cui estremo A è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse z, mentre l'estremo B dell'asta è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse x. Sul centro di massa G dell'asta agisce la forza $\underline{F_1} = -K\,\overline{\mathrm{HG}}$, con $K > 0$ e H proiezione ortogonale di G sulla retta $z = -3L$. Sul punto P agisce la forza $\underline{F_2} = -K\,\overline{\mathrm{AP}}$. Sul sistema agisce inoltre la forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse z. Si indichi con $g > 0$ l'intensità dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di P e l'angolo θ che l'asta AB forma con il verso positivo dell'asse z (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $mg/(KL)$.
3. Ponendo ora $L = 1$, $m = 1$, $K = g = 10$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia dell'asta rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{12}ML^2$, con $M = 3m$, quindi $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{4}mL^2$.

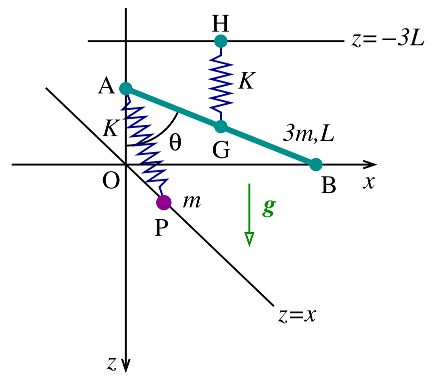

Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Data la trasformazione

$$p = \left(\frac{Q}{4}\right)^{\frac{4}{5}} q^{\frac{4\alpha}{5}}$$
$$P = \beta\, q^{\left(\frac{1}{3}-\frac{\alpha}{5}\right)} \left(\frac{Q}{4}\right)^{-\frac{1}{5}} \tag{1}$$

dalle variabili canoniche q, Q alle variabili p, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_3(p, Q)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Siano dati i due eventi

$$E_1 = (3, \alpha, 2, 0)\,, \qquad E_2 = (2\alpha, \alpha, \alpha, 0)\,.$$

1. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 sono contemporanei e, per questi valori di α, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.
2. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, per questi valori di α, determinare la trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 25 giugno 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_G = \frac{L}{2}\sin\theta$, $z_G = -\frac{L}{2}\cos\theta$, $x_P = z_P = x$, $x_A = 0$, $z_A = -L\cos\theta$, $z_H = -3L$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_P^2 + \dot{z}_P^2\right) + \frac{1}{2}(3m)\left(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(mL^2\right)\dot{\theta}^2.$$

L'energia potenziale è

$$U = -mgz_P - 3mgz_G + \frac{1}{2}K\left[(x_p - x_A)^2 + (z_P - z_A)^2 + (z_G - z_H)^2\right] =$$

$$-mgx + \frac{3}{2}mgL\cos\theta + \frac{1}{2}K\left[x^2 + (x + L\cos\theta)^2 + \left(\frac{L}{2}\cos\theta - 3L\right)^2\right].$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$2m\ddot{x} = mg - K(2x + L\cos\theta), \qquad mL^2\ddot{\theta} = \frac{3}{2}mgL\sin\theta + KL\left(x + \frac{5}{4}L\cos\theta - \frac{3}{2}L\right)\sin\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = -mg + K(2x + L\cos\theta), \qquad \partial_\theta U = -L\left(\frac{3}{2}mg + Kx + \frac{5}{4}KL\cos\theta - \frac{3}{2}KL\right)\sin\theta.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio.
La prima posizione è $\sin\theta_1 = 0$, $\cos\theta_1 = 1$, da cui $\theta_1 = 0$ e $x_1 = \frac{mg}{2K} - \frac{L}{2}$.
La seconda posizione è $\sin\theta_2 = 0$, $\cos\theta_2 = -1$, da cui $\theta_2 = \pi$ e $x_2 = \frac{mg}{2K} + \frac{L}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta \neq 0$, $x_{3,4} = \frac{11mg}{6K} - L$, $\cos\theta_{3,4} = 2 - \frac{8mg}{3KL}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$-1 < 2 - \frac{8mg}{3KL} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{3}{8} < \frac{mg}{KL} < \frac{9}{8}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = 2K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = -L\left(\frac{3}{2}mg + Kx + \frac{5}{4}KL\cos\theta - \frac{3}{2}KL\right)\cos\theta + \frac{5}{4}KL^2\sin^2\theta, \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -KL\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $2KL(\frac{3}{4}KL - 2mg)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per valori piccoli del parametro adimensionale, $\frac{mg}{KL} < \frac{3}{8}$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $2KL(2mg - \frac{9}{4}KL)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) è stabile per valori grandi del parametro adimensionale, $\frac{mg}{KL} > \frac{9}{8}$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $\frac{3}{2}K^2L^2\sin^2\theta_{3,4}$ è sempre positivo, quindi queste posizioni d'equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per valori intermedi del parametro adimensionale, $\frac{3}{8} < \frac{mg}{KL} < \frac{9}{8}$.
Riassumendo, per $\frac{mg}{KL} < \frac{3}{8}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile e la seconda instabile; per $\frac{3}{8} < \frac{mg}{KL} < \frac{9}{8}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{mg}{KL} > \frac{9}{8}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima instabile, la seconda stabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia, si ha $\frac{mg}{KL} = 1$, quindi le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = 2m, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = mL^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = 0.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni d'equilibrio stabile è

$$U_{xx} = 2K, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{5}{4}KL^2\sin^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -KL\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2K - 2m\omega^2\right)\left(\frac{5}{4}KL^2\sin^2\theta - mL^2\omega^2\right) - K^2L^2\sin^2\theta = 0,$$

che non dipende dal segno di $\sin\theta$, data l'equivalenza delle due posizioni di equilibrio. Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$18\,\omega^4 - 305\,\omega^2 + 750 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{305 \pm \sqrt{39025}}{36} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 13.96,\ \omega_-^2 = 2.985.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 3.74$ e $\omega_- = 1.73$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q, P in funzione di q, p si trova

$$Q = 4q^{-\alpha}p^{\frac{5}{4}}, \qquad\qquad P = \beta q^{\frac{1}{3}}p^{-\frac{1}{4}}.$$

Calcolando quindi la parentesi di Poisson delle nuove variabili rispetto alle vecchie e imponendo che la parentesi abbia il valore canonico si trova

$$1 = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} = \left(\alpha - \frac{5}{3}\right)\beta q^{-\left(\alpha + \frac{2}{3}\right)},$$

da cui

$$\alpha + \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{2}{3}; \qquad\qquad \left(\alpha - \frac{5}{3}\right)\beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{3}{7}.$$

Esprimendo ora q, P in funzione delle variabili Q, p, in corrispondenza dei valori di α e β trovati, si ha

$$q = \left(\frac{Q}{4}\right)^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{15}{8}}, \qquad\qquad P = -\frac{3}{7}\left(\frac{Q}{4}\right)^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{7}{8}}.$$

Poiché $\mathrm{d}F_3 = -q\,\mathrm{d}p - P\,\mathrm{d}Q$, si ha

$$\mathrm{d}F_3 = -\left(\frac{Q}{4}\right)^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{15}{8}}\,\mathrm{d}p + \frac{3}{7}\left(\frac{Q}{4}\right)^{\frac{1}{2}} p^{-\frac{7}{8}}\,\mathrm{d}Q \qquad \Rightarrow \qquad F_3(p,Q) = \frac{8}{7}\left(\frac{Q}{4}\right)^{\frac{3}{2}} p^{-\frac{7}{8}}.$$

Al risultato si perviene anche calcolando prima $F_1(q,Q)$ e poi ricordando che $F_3(p,Q) = [F_1(q,Q) - qp]_{q=q(p,Q)}$.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
1. Calcolando l'intervallo tra i due eventi si ha

$$\underline{E_2E_1}^2 = (2\alpha - 3)^2 - (\alpha - 2)^2.$$

Imponendo che l'intervallo sia di genere tempo si ha $(2\alpha - 3)^2 > (\alpha - 2)^2$ cioè $\alpha < 1$ o $\alpha > \frac{5}{3}$. Per tali valori di α esiste un sistema di riferimento nel quale i due eventi avvengono nello stesso luogo. Considerando che, per quanto concerne la separazione spaziale, i due eventi differiscono per il valore della coordinata y, la trasformazione cercata comporta il moto relativo lungo l'asse y e deve essere tale che

$$\Delta y' = \frac{\Delta y - \frac{v}{c}\Delta(ct)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{\alpha - 2}{2\alpha - 3}.$$

La condizione su α garantisce che sia $v^2 < c^2$.
2. Per $1 < \alpha < \frac{5}{3}$ l'intervallo è di genere spazio ed è possibile trovare sistemi di riferimento rispetto ai quali i due eventi avvengono contemporaneamente. Limitandoci a considerare sistemi in moto lungo l'asse y abbiamo

$$\Delta(ct') = \frac{\Delta(ct) - \frac{v}{c}\Delta y}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{v}{c} = \frac{2\alpha - 3}{\alpha - 2}.$$

Anche in questo caso la condizione su α garantisce che sia $v^2 < c^2$.