Compito di Meccanica Statistica del 26 gennaio 2022
Proff. S. Caprara, I. Giardina, M. Grilli

Si consideri il gas perfetto unidimensionale descritto dalla Hamiltoniana di singola particella

$$H = c|p| + \gamma|q|^{\alpha},$$

con c, γ, α parametri reali strettamente positivi e p, $q \in \mathbb{R}$, rispettivamente, impulso e coordinata di una particella.

1. Meccanica Statistica Classica.
Assumendo che il sistema sia composto da N particelle indistinguibili che obbediscono la statistica classica, e sia mantenuto a temperatura costante T mediante l'accoppiamento con un opportuno termostato:
1. [4 punti] si determini l'entropia per particella s in funzione della temperatura del gas;
2. [3 punti] si determini l'energia interna per particella u in funzione della temperatura del gas;
3. [3 punti] si determini il valor medio della distanza $|q|$ di una particella dall'origine in funzione della temperatura del gas.

[Si lasci indicato con $\Gamma_{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ il valore della funzione Gamma di Eulero, $\int_0^\infty x^{\frac{1}{\alpha}-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, per un generico valore positivo del suo argomento. Si ricordi che $\Gamma_{\mathrm{E}}(\ell+1) = \ell\Gamma_{\mathrm{E}}(\ell)$.]

2. Bosoni.
Assumendo che il gas sia composto di bosoni di spin $\mathcal{S} = 0$:
1. [4 punti] si dimostri l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein;
2. [3 punti] si determini la temperatura di condensazione T_0;
3. [3 punti] si determini la frazione di particelle nel condensato N_0/N per $T = \frac{1}{2}T_0$, quando $\alpha = 1$.

[Si ricordi che $\int_0^\infty \frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{\mathrm{e}^z-1}\,\mathrm{d}z = \Gamma_{\mathrm{E}}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)$.]

3. Fermioni.
Assumendo che il gas sia composto di fermioni di spin $\mathcal{S} = \frac{1}{2}$:
1. [4 punti] si determini la dipendenza dell'energia di Fermi ε_{F} dal numero di particelle N;
2. [3 punti] si determini la massima distanza $|q|_{\max}$ di una particella dall'origine in funzione di ε_{F};
3. [3 punti] si determini il massimo valore $|p|_{\max}$ dell'impulso di una particella in funzione di ε_{F}.

Soluzione del Compito di Meccanica Statistica del 26 gennaio 2022
Proff. S. Caprara, I. Giardina, M. Grilli

1.1 La funzione di partizione di una particella è

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{-\beta c|p|}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}q\, \mathrm{e}^{-\beta\gamma|q|^\alpha} = \frac{4}{h}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}p\, \mathrm{e}^{-\beta cp}\int_{0}^{+\infty} \mathrm{d}q\, \mathrm{e}^{-\beta\gamma q^\alpha} = \frac{4\Gamma_{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}{hc\alpha\gamma^{1/\alpha}\,\beta^{1+1/\alpha}},$$

dove nell'integrale in $\mathrm{d}q$ si è operato il cambio di variabile $x = \beta\gamma q^\alpha$. La funzione di partizione del gas è $Z_N = (Z_1)^N/N! \approx (\mathrm{e}\,Z_1/N)^N$, dove si è usata la formula di Stirling per il valore asintotico di $N!$. Quindi, l'entropia per particella è

$$s(T) = \frac{\partial}{\partial T}\left[\kappa_{\mathrm{B}} T\log\left(\frac{\mathrm{e}Z_1}{N}\right)\right] = \kappa_{\mathrm{B}}\left[\log\left(\frac{\mathrm{e}Z_1}{N}\right) + 1 + \frac{1}{\alpha}\right] = \kappa_{\mathrm{B}}\log\left[\frac{4\mathrm{e}^{2+1/\alpha}\,\Gamma_{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\,(\kappa_{\mathrm{B}}T)^{1+1/\alpha}}{Nhc\alpha\gamma^{1/\alpha}}\right].$$

1.2 L'energia interna per particella è

$$u(T) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1 = \left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\kappa_{\mathrm{B}}T.$$

1.3 Il valor medio cercato è

$$\langle|q|\rangle(T) = \frac{\int_0^\infty \mathrm{d}q\, q\, \mathrm{e}^{-\beta\gamma q^\alpha}}{\int_0^\infty \mathrm{d}q\, \mathrm{e}^{-\beta\gamma q^\alpha}} = \frac{\Gamma_{\mathrm{E}}\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{(\beta\gamma)^{1/\alpha}\Gamma_{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{\Gamma_{\mathrm{E}}\left(\frac{2}{\alpha}\right)}{\Gamma_{\mathrm{E}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)}\left(\frac{\kappa_{\mathrm{B}}T}{\gamma}\right)^{1/\alpha}.$$

2.1 La densità degli stati è

$$G(\varepsilon) = \frac{g}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}p\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}q\,\delta(\varepsilon - c|p| - \gamma|q|^\alpha) = \frac{4g}{h}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}p\int_0^{+\infty}\mathrm{d}q\,\delta(\varepsilon - cp - \gamma q^\alpha),$$

dove $g = 2\mathcal{S}+1$ è la degenerazione di spin. Nel caso dei bosoni, $g = 1$. Integrando in $\mathrm{d}p$ si ottiene

$$G(\varepsilon) = \frac{4g}{ch}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}q\,\vartheta(\varepsilon-\gamma q^\alpha) = \frac{4g}{ch}\vartheta(\varepsilon)\int_0^{(\varepsilon/\gamma)^{1/\alpha}}\mathrm{d}q = \frac{4g}{ch}\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\vartheta(\varepsilon).$$

È evidente che l'energia minima di una particella è $\varepsilon_{\min} = 0$. Poiché l'integrale

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{d}\varepsilon\,\frac{G(\varepsilon)}{\mathrm{e}^{\beta\varepsilon}-1}$$

converge nell'estremo inferiore, dove la funzione integranda si comporta come $\varepsilon^{1/\alpha-1}$, la condensazione di Bose-Einstein avviene.

2.2 La temperatura di condensazione è determinata dall'equazione

$$N = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}\varepsilon\,\frac{G(\varepsilon)}{\mathrm{e}^{\beta_0\varepsilon}-1},$$

dove $\beta_0 = (\kappa_{\mathrm{B}}T_0)^{-1}$. Effettuando il cambio di variabile $z = \beta_0\varepsilon$, si ha

$$N = \frac{4}{ch\gamma^{1/\alpha}}\left(\kappa_{\mathrm{B}}T_0\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}z\,\frac{z^{\frac{1}{\alpha}}}{\mathrm{e}^z-1} = \frac{4\Gamma_{\mathrm{E}}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{ch\gamma^{1/\alpha}}\left(\kappa_{\mathrm{B}}T_0\right)^{1+\frac{1}{\alpha}},$$

da cui

$$T_0 = \frac{1}{\kappa_{\mathrm{B}}}\left[\frac{Nch\gamma^{1/\alpha}}{4\Gamma_{\mathrm{E}}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\zeta\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

2.2 Per $T < T_0$, indicando il numero di particelle negli stati con energia positiva con $N_>$, si ha

$$N_> = N \left(\frac{T}{T_0}\right)^{1+\frac{1}{\alpha}}.$$

Per $T = \frac{1}{2}T_0$ e $\alpha = 1$ si ha $N_> = \frac{1}{4}N$ e $N_0 = N - N_> = \frac{3}{4}N$, quindi $N_0/N = \frac{3}{4}$.

3.1 Per i fermioni $g = 2$ e la densità degli stati vale

$$G(\varepsilon) = \frac{8}{ch}\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \vartheta(\varepsilon).$$

Allora

$$N = \int_0^{\varepsilon_\mathrm{F}} \mathrm{d}\varepsilon\, G(\varepsilon) = \frac{8\alpha}{ch\gamma^{1/\alpha}(1+\alpha)}\varepsilon_\mathrm{F}^{1+\frac{1}{\alpha}},$$

da cui

$$\varepsilon_\mathrm{F} = \left[\frac{Nch\gamma^{1/\alpha}(1+\alpha)}{8\alpha}\right]^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}.$$

3.2 Sulla superficie di Fermi deve essere $\varepsilon_\mathrm{F} = c|p| + \gamma|q|^\alpha$. Il massimo valore di $|q|$ si ha per $p = 0$, da cui

$$|q|_\mathrm{max} = \left(\frac{\varepsilon_\mathrm{F}}{\gamma}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

3.3 Analogamente, il massimo valore di $|p|$ si ha per $q = 0$, da cui

$$|p|_\mathrm{max} = \frac{\varepsilon_\mathrm{F}}{c}.$$