Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 29 gennaio 2019
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano verticale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxz, con asse z verticale discendente, si muove il sistema rigido formato da una guida circolare omogenea, di raggio R e massa m, e da una barra omogenea, di lunghezza $2R$ e massa m, saldata sul diametro AB della guida circolare (si veda la Fig. 1). Il punto A del sistema è vincolato a scorrere senza attrito lungo l'asse Oz. Sul sistema agiscono le forze attive $\underline{F}_1 = -k\,\mathrm{OA}$, con $k > 0$, $\underline{F}_2 = -k\,\mathrm{HG}$, dove G è il centro di massa del sistema e H è la proiezione ortogonale di G sull'asse Ox, e la forza peso, diretta nel verso positivo dell'asse Oz. Si indichi con $g > 0$ il valore dell'accelerazione di gravità. Si adottino come coordinate lagrangiane la coordinata z di A e l'angolo θ che AB forma con il verso positivo dell'asse Oz.
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\lambda = \frac{mg}{kR} \in [0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $g = 1$, $m = 1$, $R = 1$, $k = 4$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia sistema rigido guida+barra rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{4}{3}mR^2$.

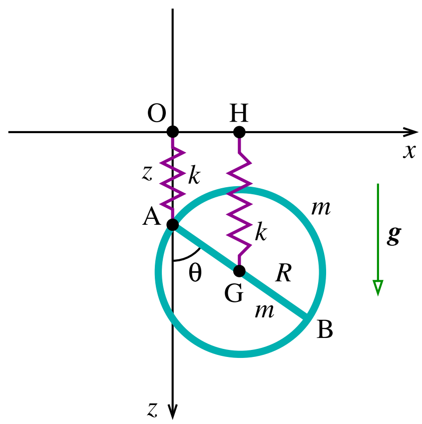

Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Data la trasformazione

$$p = \frac{1}{\alpha}\ln(2\,Q\,q^{-3/2})$$
$$P = \frac{1}{3}\,(2\,Q)^{6/\alpha}\,q^{\beta-(9/\alpha)}$$

dalle variabili q, Q alle variabili p, P, dire per quali valori dei parametri reali α, β la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Una astronave parte da terra muovendosi lungo l'asse x con velocità $c/4$. Dopo un tempo $T = 1$ anno, da terra viene inviato un segnale elettromagnetico verso l'astronave. Quando l'astronave riceve il segnale (evento A), essa inverte il verso del moto, tornando verso terra con velocità $c/2$. Nel momento in cui inverte il senso di marcia, l'astronave manda un segnale elettromagnetico verso terra.
1. Determinare l'intervallo di tempo, misurato da un orologio a terra, tra il ricevimento del segnale emesso dall'astronave (evento B), e l'arrivo dell'astronave stessa (evento C).
2. Determinare il ritardo tra l'orologio a terra e quello sull'astronave, misurato nell'istante in cui l'astronave è tornata a terra.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 25 giugno 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_G = R\sin\theta$, $z_G = z + R\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}(2m)\left(\dot{x}_G^2 + \dot{z}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(2\dot{z}^2 + \frac{10}{3}R^2\,\dot{\theta}^2 - 4R\sin\theta\,\dot{z}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}kz^2 + \frac{1}{2}k(z + R\cos\theta)^2 - 2mg(z + R\cos\theta).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$\ddot{z} - R\sin\theta\,\ddot{\theta} - R\cos\theta\,\dot{\theta}^2 = g - \frac{k}{m}\left(z + \frac{R}{2}\cos\theta\right),$$

$$\frac{10}{3}R^2\,\ddot{\theta} - 2R\sin\theta\,\ddot{z} = \left[\frac{k}{m}\,(z + R\cos\theta) - 2g\right]R\sin\theta.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_z U = k\,(2z + R\cos\theta) - 2mg, \qquad \partial_\theta U = R\sin\theta\,[2mg - k(z + R\cos\theta)]\,.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$\begin{cases} z + \frac{R}{2}\cos\theta = \frac{mg}{k}, \\ \left(z + R\cos\theta - \frac{2mg}{k}\right)\sin\theta = 0. \end{cases}$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $z_1 = \frac{mg}{k} - \frac{R}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $z_2 = \frac{mg}{k} + \frac{R}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta_{3,4} \neq 0$, $z_{3,4} = 0$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{2mg}{kR}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$. Queste due posizioni esistono solo se

$$0 \leq \frac{2mg}{kR} \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{zz}U = 2k, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = R\cos\theta\,[2mg - k(z + R\cos\theta)] + kR^2\sin^2\theta, \quad \partial^2_{z\theta}U = \partial^2_{\theta z}U = -kR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $2k^2R^2\left(\frac{mg}{kR} - \frac{1}{2}\right)$ e poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (z_1, θ_1) è stabile per $\lambda > \frac{1}{2}$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-2k^2R^2\left(\frac{mg}{kR} + \frac{1}{2}\right)$ e poiché $\partial^2_{zz}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (z_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\lambda \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2}$.
Riassumendo, per $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\lambda > \frac{1}{2}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. Si ha $\cos\theta_{3,4} = \frac{1}{2}$ e $\sin\theta_{3,4} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{z}\dot{z}} = 2m \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{10}{3}mR^2, \qquad T_{\dot{z}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{z}} = -2mR\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{zz} = 2k, \qquad U_{\theta\theta} = kR^2\sin^2\theta, \qquad U_{z\theta} = U_{\theta z} = -kR\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij}-\omega^2 T_{ij}|=0$ dà

$$2\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)\left(\frac{3k}{4m}-\frac{10}{3}\omega^2\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{k}{m}-2\omega^2\right)^2=0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$11\,\omega^4-62\,\omega^2+36=0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2=\frac{31\pm\sqrt{565}}{11}\qquad\Rightarrow\qquad\omega_+^2=4.98,\;\;\omega_-^2=0.657.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+=2.23$ e $\omega_-=0.811$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q in funzione di p e q otteniamo:

$$\begin{aligned}Q&=\frac{1}{2}\,q^{3/2}\,e^{\alpha p}\\ P&=\frac{1}{3}\,q^{\beta}\,e^{6p}\end{aligned}\tag{1}$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene

$$[Q,P]=q^{\beta+3/2-1}\,e^{(\alpha+6)p}\,\frac{1}{6}(9-\alpha\beta)=1.$$

che implica $\alpha=-6$, $\beta=-\frac{1}{2}$. La trasformazione è quindi canonica se

$$\begin{aligned}Q&=\frac{1}{2}\,q^{3/2}\,e^{-6p}\\ P&=\frac{1}{3}\,q^{-1/2}\,e^{6p}.\end{aligned}\tag{2}$$

Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna ricavare p e Q in funzione di q e P:

$$\begin{aligned}p&=\frac{1}{6}\,\ln(3\,q^{1/2}\,P)\\ Q&=\frac{1}{6}\,\frac{q}{P}.\end{aligned}\tag{3}$$

Sappiamo che $dF_2(q,P)\;=\;p\,\mathrm{d}q\;+\;Q\,\mathrm{d}P$ e quindi:

$$\begin{aligned}F_2(q,P)&=\int\frac{1}{6}\,\frac{q}{P}\,\mathrm{d}P\;+\;f(q)\\ F_2(q,P)&=\int\frac{1}{6}\,\ln P\,\mathrm{d}q\;+\;\int\frac{1}{12}\,\ln q\,\mathrm{d}q\;+\;\frac{1}{6}\,q\,\ln 3\end{aligned}\tag{4}$$

$\Rightarrow f(q)\;=\;\int\frac{1}{12}\ln q\,\mathrm{d}q\;+\;\frac{1}{6}\,q\,\ln 3\;=\;\frac{1}{12}\,q\,(\ln q-1)\;+\;\frac{1}{6}\,q\,\ln 3\Rightarrow$

$$F_2(q,P)\;=\;\frac{1}{6}\,q\,\ln(3P)\;+\;\frac{1}{12}\,q\,(\ln q-1)=\;\frac{1}{6}\,q\left[\ln(3P\sqrt{q})-\frac{1}{2}\right].$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Fissiamo l'origine degli orologi a terra e sull'astronave al momento della partenza, e sia $x=0$ la posizione della terra. Sia A l'evento in cui l'astronave è raggiunta dal segnale elettromagnetico. Il tempo t_A e la posizione x_A di questo evento si ottengono risolvendo il sistema di equazioni

$$\begin{aligned}x_A&=c\,(t_A-T)\\ x_A&=\frac{c}{4}\,t_A\,,\end{aligned}$$

che ha come soluzione

$$t_A = \frac{4}{3}T\,, \quad x_A = \frac{c}{3}T\,.$$

1. Siano B l'evento del ricevimento a terra del segnale dall'astronave, e C l'evento del ritorno a terra dell'astronave. Poiché il segnale viene emesso in A,

$$t_B = t_A + \frac{x_A}{c} = \frac{4}{3}T + \frac{1}{3}T = \frac{5}{3}T$$
$$t_C = t_A + \frac{x_A}{c/2} = \frac{4}{3}T + \frac{2}{3}T = 2\,T$$

quindi

$$t_C - t_B = \frac{1}{3}T\,.$$

2. Sia $v_1 = c/4$ la velocità nel tratto OA, $v_2 = c/2$ la velocità nel tratto AC. L'orologio sull'astronave, nell'evento A, misura il tempo proprio

$$\tau_A = \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}t_A = \sqrt{1 - \frac{1}{16}}\frac{4}{3}T = \frac{\sqrt{15}}{3}T\,.$$

L'intervallo di tempo proprio sull'astronave tra A e C è

$$\tau_C - \tau_A = \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}(t_C - t_A) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}}\left(2T - \frac{4}{3}T\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{2}{3}T = \frac{\sqrt{3}}{3}T\,,$$

quindi

$$\tau_C = \frac{\sqrt{15} + \sqrt{3}}{3}T \simeq 1.87\,T$$

e il ritardo è

$$t_C - \tau_C = 2\,T - 1.87\,T = 0.13\,T\,.$$