

Corso di Meccanica Statistica - Compito per l'appello del 29/01/2025

Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche, di massa m , non interagenti, a contatto con un termostato a temperatura T . Le particelle sono vincolate a muoversi su un piano, sul quale è fissato un riferimento cartesiano ortogonale Oxy . L'hamiltoniana di singola particella è

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{p^2}{2m} + A r,$$

dove $p \equiv |\mathbf{p}|$, $\mathbf{q}$ è il vettore di componenti cartesiane x, y , $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ è la distanza dall'origine, A è un parametro dimensionale strettamente positivo.

1. Assumendo che le particelle possano essere descritte mediante la meccanica statistica classica:

- [4 punti] a. determinare l'energia interna per particella, $u = U/N$;
- [3 punti] b. determinare la frazione $N_{\geq}/N$ di particelle con impulso $p \geq \sqrt{m\kappa_B T}$;
- [3 punti] c. determinare il valore medio $\bar{r}$ della distanza di una particella dall'origine.

2. Assumendo che le particelle siano bosoni con spin $s = 0$:

- [4 punti] a. determinare la temperatura di condensazione di Bose-Einstein T_0 in funzione di N ;
- [3 punti] b. determinare l'energia interna per particella $u = U/N$ per $T = T_0$, in funzione di T_0 ;
- [3 punti] c. determinare la temperatura $T_{3/4}$ alla quale 3 particelle su 4 sono nel condensato, in funzione di T_0 .

3. Assumendo che le particelle siano fermioni con spin $s = \frac{1}{2}$ e il gas si trovi a $T = 0$:

- [3 punti] a. determinare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione di N ;
- [3 punti] b. determinare l'energia interna per particella $u = U/N$ in funzione di ϵ_F ;
- [4 punti] c. determinare il rapporto tra la distanza media $\bar{r}$ e la distanza massima $r_{\max}$ di una particella dall'origine in funzione di ϵ_F .

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty dt \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}$.

Risoluzione

1. Particelle classiche

a. La funzione di partizione di una particella nell'ensemble canonico per il problema posto è

$$Z_1 = \frac{1}{h^2} \int d^2\mathbf{p} \int d^2\mathbf{q} e^{-\beta H(\mathbf{p}, \mathbf{q})} = \frac{4\pi^2}{h^2} \int_0^\infty dp p e^{-\beta p^2/2m} \int_0^\infty dr r e^{-\beta A r} = \frac{4\pi^2 m}{h^2 A^2 \beta^3},$$

dove $\beta \equiv (\kappa_B T)^{-1}$. L'energia libera di Helmholtz è

$$F = -\kappa_B T \ln \left(\frac{Z_1^N}{N!} \right) \approx -N \kappa_B T \ln \left(\frac{e Z_1}{N} \right) = -N \kappa_B T \ln \left(\frac{4\pi^2 e m}{h^2 A^2 N \beta^3} \right).$$

L'energia interna per particella è

$$u = \frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F) = 3 \kappa_B T.$$

b. Poiché le particelle sono indipendenti, la frazione cercata è uguale alla probabilità che una particella abbia impulso $p \geq \sqrt{m \kappa_B T}$, quindi

$$\frac{N_{\geq}}{N} = \frac{\int_{\sqrt{m \kappa_B T}}^\infty dp p e^{-\beta p^2/2m}}{\int_0^\infty dp p e^{-\beta p^2/2m}} = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6065.$$

c. Il valore medio cercato è

$$\bar{r} = \frac{\int_0^\infty dr r^2 e^{-\beta A r}}{\int_0^\infty dr r e^{-\beta A r}} = \frac{\Gamma(3)}{A\beta} = \frac{2\kappa_B T}{A}.$$

2. Bosoni

Calcoliamo preliminarmente la densità degli stati

$$g(\epsilon) = \frac{g_s}{h^2} \int d^2\mathbf{p} \int d^2\mathbf{q} \delta(\epsilon - H(\mathbf{p}, \mathbf{q})) = \frac{4\pi^2 g_s}{h^2} \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dr r \delta\left(\epsilon - \frac{p^2}{2m} - A r\right),$$

dove $g_s = 2s + 1$ è la degenerazione di spin. Svolgendo dapprima l'integrale in p abbiamo

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi^2 g_s m}{h^2} \int_0^\infty dr r \theta(\epsilon - A r) \equiv \int_0^\infty dr g(\epsilon, r),$$

dove identifichiamo la densità degli stati congiunta $g(\epsilon, r)$ che ci servirà in seguito. Integrando ora rispetto a r , otteniamo

$$g(\epsilon) = \frac{2\pi^2 g_s m}{h^2 A^2} \epsilon^2 \theta(\epsilon),$$

da cui è evidente che l'energia minima di una particella è $\epsilon_{\min} = 0$.

a. Per i bosoni, $g_s = 1$. Alla temperatura di condensazione si ha

$$N = \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} d\epsilon,$$

dove $\beta_0 \equiv (\kappa_B T_0)^{-1}$. Passando alla variabile adimensionale $\xi = \beta_0 \epsilon$, troviamo

$$N = \frac{2\pi^2 m}{h^2 A^2} (\kappa_B T_0)^3 \int_0^\infty \frac{\xi^2}{e^\xi - 1} d\xi = \frac{2\pi^2 m}{h^2 A^2} \Gamma(3) \zeta(3) (\kappa_B T_0)^3,$$

da cui, poiché $\Gamma(3) = 2$, si trova

$$\kappa_B T_0 = \left[\frac{h^2 A^2 N}{4\pi^2 m \zeta(3)} \right]^{1/3}.$$

b. Per $T \leq T_0$ abbiamo

$$u \equiv \frac{U}{N} = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^\infty \frac{\epsilon g(\epsilon)}{e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2\pi^2 m}{h^2 A^2 N} (\kappa_B T)^4 \int_0^\infty \frac{\xi^3}{e^\xi - 1} d\xi = \frac{2\pi^2 m}{h^2 A^2 N} \Gamma(4) \zeta(4) (\kappa_B T)^4.$$

Sostituendo l'espressione di N e ponendo $T = T_0$ si trova

$$u(T = T_0) = \frac{3\zeta(4)}{\zeta(3)} \kappa_B T_0.$$

c. Per $T \leq T_0$, detto $N_>$ il numero di particelle fuori condensato, abbiamo

$$N_> = \int_{-\infty}^\infty \frac{g(\epsilon)}{e^{\beta \epsilon} - 1} d\epsilon = \frac{2\pi^2 m}{h^2 A^2} (\kappa_B T)^3 \int_0^\infty \frac{\xi^2}{e^\xi - 1} d\xi = \frac{2\pi m}{h^2 A^2} \Gamma(3) \zeta(3) (\kappa_B T)^3 = N \left(\frac{T}{T_0} \right)^3.$$

La condizione richiesta impone $N_> = \frac{1}{4} N$. Allora, $T_{3/4} = 4^{-1/3} T_0 \approx 0.6300 T_0$.

3. Fermioni

a. Nel caso dei fermioni, $g_s = 2$. Abbiamo quindi

$$N = \int_{-\infty}^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{4\pi^2 m}{3h^2 A^2} \epsilon_F^3 \theta(\epsilon_F),$$

da cui

$$\epsilon_F = \left(\frac{3h^2 A^2 N}{4\pi^2 m} \right)^{1/3}.$$

b. L'energia per particella è

$$u = \frac{1}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_F} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \frac{\pi^2 m}{h^2 A^2 N} \epsilon_F^4$$

con $\epsilon_F \geq 0$. Sostituendo l'espressione per N , troviamo

$$u = \frac{3}{4} \epsilon_F.$$

c. Il valore medio della distanza di una particella dall'origine è

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \int_0^\infty dr r g(\epsilon, r) = \frac{8\pi^2 g_s m}{3h^2 A^3 N} \int_0^{\epsilon_F} d\epsilon \epsilon^3 = \frac{2\pi^2 g_s m}{3h^2 A^3 N} \epsilon_F^4.$$

Sostituendo l'espressione per N , troviamo

$$\bar{r} = \frac{\epsilon_F}{2A}.$$

Si ha inoltre $A r_{\max} = \epsilon_F$, da cui

$$\frac{\bar{r}}{r_{\max}} = \frac{1}{2}.$$