

Corso di Meccanica Statistica - Compito del 30 Gennaio 2026
Proff. S. Caprara, I. Giardina e F. Sciortino

Si consideri un gas costituito da N particelle identiche classiche, di massa m , non interagenti, in 2 dimensioni a temperatura T . L'Hamiltoniana di singola particella è

$$H(\vec{p}, \vec{r}) = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + a|\vec{r}|$$

dove $\vec{p}$ e $\vec{r}$ sono vettori di spazi di dimensione 2 e $a > 0$ è una costante dimensionale.

1. [2 punti] Calcolare l'energia per particella in funzione di T .
2. [2 punti] Calcolare l'entropia del sistema in funzione dell'energia. Discutere brevemente se $S(N, E)$ è estensiva.
3. [3 punti] Calcolare la probabilità che la singola particella abbia energia ϵ al variare di T .
4. [3 punti]. Calcolare la probabilità di trovare $n < N$ particelle con $|\vec{r}| < R$ (con $R > 0$)

Assumiamo ora che le particelle siano bosoni (spin 2)

5. [3 punti] Qual è la temperatura T_0 di condensazione?
6. [4 punti] Quale frazione di particelle è nel condensato a $T = \frac{1}{3}T_0$?

Assumiamo ora che le particelle siano fermioni (spin 3/2)

7. [3 punti] Calcolare l'energia di Fermi ϵ_F in funzione di N
8. [4 punti] Per quali valori dell'energia di Fermi nessuna particella ha $|\vec{r}| > R$?

Si consideri ora un sistema di 3 spin di Ising ($S_k = \pm 1$, $k = 1, 2, 3$) descritti dalla seguente Hamiltoniana:

$$H(S_1, S_2, S_3) = -J(S_1 S_2 + S_2 S_3),$$

con $J > 0$.

1. [3 punti] Qual è la probabilità di trovare $S_1 = -S_3$ in funzione di T ?
2. [3 punti] Qual è la probabilità di trovare $S_1 = S_3$ a temperatura infinita e a temperatura nulla?

Si ricordano le definizioni: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$; $\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$.

Si noti che $\int_0^A t e^{-t} dt = 1 - (1 + A)e^{-A}$.

Risoluzione

Particelle classiche

Adottando sistemi di coordinate polari per $\vec{p}$ e $\vec{r}$, posto $\beta = (\kappa_B T)^{-1}$, la funzione di partizione di singola particella è

1.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{(2\pi)^2}{h^2} \int_0^\infty e^{-\beta p^2/2m} p \, dp \int_0^\infty e^{-\beta ar} r \, dr \\ &= \frac{4\pi^2}{h^2} (m\kappa_B T) \left(\frac{\kappa_B T}{a} \right)^2 \int_0^\infty y e^{-y} dy = \frac{4\pi^2 m}{h^2 a^2} (\kappa_B T)^3. \end{aligned}$$

L'energia media per particella è

$$E_1 = -\frac{\partial \ln Z_1}{\partial \beta} = 3\kappa_B T.$$

2. Per calcolare l'entropia del sistema usiamo

$$TS = E - F = 3N\kappa_B T + \kappa_B T \ln \frac{Z_1^N}{N!} = 3N\kappa_B T + N\kappa_B T \ln Z_1 - \kappa_B T (N \ln N - N)$$

$$\frac{S}{N\kappa_B} = 4 + \ln Z_1 - \ln N = \ln \left[\frac{4\pi^2 e^4 m (k_B T)^3}{h^2 N a^2} \right]$$

e, sostituendo $E = 3N\kappa_B T$,

$$\frac{S}{Nk_B} = \ln \left[\frac{4\pi^2 e^4 m}{27 h^2} \frac{E^3}{N^4 a^2} \right].$$

$S(E, N)$ non è estensiva. Ciò è dovuto al fatto che quando abbiamo un potenziale esterno confinante, raddoppiare (per esempio) il sistema non significa raddoppiare simultaneamente sia il numero di particelle che il volume del sistema. Cambiando il numero di particelle, l'energia per particella rimane uguale ma l'entropia per particella cambia (più particelle nella stessa regione spaziale). Per recuperare l'estensività dell'entropia bisogna assumere che il parametro a , che regola il confinamento del gas, si comporti come l'inverso di un volume. Più esattamente, la condizione che il gas abbia una densità costante si traduce in questo caso con la condizione $a^2 N = \text{costante}$.

3. Per calcolare $P(\epsilon)$ occorre calcolare la densità degli stati di singola particella

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{4\pi^2}{h^2} \int_0^\infty dp p \int_0^\infty dr r \delta(H - \epsilon) = \frac{4\pi^2 m}{h^2} \int_0^\infty \frac{dp^2}{2m} \int_0^\infty dr r \delta\left(\frac{p^2}{2m} + ar - \epsilon\right) \\ &= \frac{4\pi^2 m}{h^2} \int_0^\infty dt \int_0^\infty dr r \delta(t + ar - \epsilon) = \frac{4\pi^2 m}{h^2 a^2} \int_0^\infty dq q \theta(\epsilon - q) = \\ &= \frac{4\pi^2 m}{h^2 a^2} \int_0^\epsilon q dq \theta(\epsilon) = \frac{2\pi^2 m}{h^2 a^2} \epsilon^2 \theta(\epsilon). \end{aligned}$$

Da qui

$$P(\epsilon) = \frac{g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon}}{\int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon}} = \frac{g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon}}{Z_1} = \frac{\beta^3 \epsilon^2}{2} e^{-\beta\epsilon} \theta(\epsilon).$$

Possiamo verificare il calcolo precedente di Z_1 notando che

$$Z_1 = \int_0^\infty d\epsilon g(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} = \frac{2\pi^2 m}{h^2 a^2} \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^2 e^{-\beta\epsilon} = \frac{4\pi^2 m}{h^2 a^2} \beta^{-3}.$$

4. Occorre ora calcolare la probabilità p_R che una singola particella abbia $|\vec{r}| < R$. Quindi

$$p_R = \frac{\int_0^R dr r e^{-\beta ar}}{\int_0^\infty dr r e^{-\beta ar}} = \frac{\int_0^{\beta a R} dy y e^{-y}}{\int_0^\infty dy y e^{-y}}$$

e, ricordando che $\int_0^A t e^{-t} dt = 1 - (1 + A) e^{-A}$,

$$p_R = 1 - (1 + \beta a R) e^{-\beta a R}.$$

La probabilità cercata è data dalla binomiale

$$p(n, R) = \frac{N!}{(N - n)! n!} p_R^n (1 - p_R)^{N - n}.$$

Bosoni

5. Ricordando che $\epsilon_{min} = 0$, e $g_S = 5$, la temperatura di condensazione è data dal seguente integrale

$$\begin{aligned} N &= g_S \int_0^\infty \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} = \frac{10\pi^2 m}{h^2 a^2} \int_0^\infty \frac{\epsilon^2 d\epsilon}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1} \\ &= \frac{10\pi^2 m}{h^2 a^2} \beta_0^{-3} \int_0^\infty \frac{y^2 dy}{e^y - 1} = \frac{10\pi^2 m}{h^2 a^2} \Gamma(3) \zeta(3) (\kappa_B T_0)^3, \end{aligned}$$

da cui

$$k_B T_0 = \left(\frac{h^2 a^2 N}{20 \zeta(3) \pi^2 m} \right)^{1/3}.$$

6. A $T = \frac{1}{3} T_0$, le particelle fuori dal condensato sono (sostituendo $3\beta_0$ a β_0)

$$N_{\text{fuori}} = g_S \int_0^\infty \frac{g(\epsilon) d\epsilon}{e^{3\beta_0 \epsilon} - 1}$$

e dunque

$$N_{\text{fuori}} (T = \frac{1}{3} T_0) = \frac{1}{27} N,$$

$$N_{\text{condensato}} (T = \frac{1}{3} T_0) = N - N_{\text{fuori}} (T = \frac{1}{3} T_0) = N \left(1 - \frac{1}{27} \right) = \frac{26}{27} N.$$

Fermioni

In questo caso $g_S = 4$

- 7.

$$N = g_S \int_0^{\epsilon_F} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{8\pi^2 m}{h^2 a^2} \int_0^{\epsilon_F} \epsilon^2 d\epsilon = \frac{8\pi^2 m}{3 h^2 a^2} \epsilon_F^3$$

e

$$\epsilon_F = \left(\frac{3 h^2 a^2 N}{8 \pi^2 m} \right)^{1/3}.$$

8. Se una particella ha $|\vec{r}| > R$, la sua energia è $\epsilon > aR$. Quindi, se $\epsilon_F \leq aR$, non ci sono particelle con $|\vec{r}| > R$.

Spin

La tabella seguente mostra per ognuno dei possibili otto stati i corrispondenti valori di energia e fattore di Boltzmann

S_1	S_2	S_3	E/J	Boltzmann
1	1	1	-2	$e^{2\beta J}$
1	1	-1	0	1
1	-1	1	2	$e^{-2\beta J}$
1	-1	-1	0	1
-1	1	1	0	1
-1	1	-1	2	$e^{-2\beta J}$
-1	-1	1	0	1
-1	-1	-1	-2	$e^{2\beta J}$

La funzione di partizione è dunque

$$Z = 4 + 2e^{-2\beta J} + 2e^{2\beta J} = 4[1 + \cosh(2\beta J)] = 8 \cosh^2(\beta J).$$

9. la probabilità di trovare $S_1 = -S_3$ in funzione di T è data da

$$P(S_1 = -S_3) = \frac{1}{2 \cosh^2(\beta J)},$$

visto che i 4 stati con $S_1 = -S_3$ hanno tutti energia nulla.

10. Ad alta T gli spin sono scorrelati tra loro, quindi $P(S_1 = S_3, T = \infty) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Infatti, 4 stati su 8 hanno $S_1 = S_3$. A bassa T il sistema è con probabilità $\frac{1}{2}$ in uno dei due stati di energia minima ($-2J$). In entrambi $S_1 = S_3$ e dunque $P(S_1 = S_3, T = 0) = 1$.