Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 3 settembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una lamina quadrata rigida e omogenea, ABCD, di lato L e massa M. Il vertice A della lamina è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. La lamina è libera di ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy e passante per A. Il vertice C della lamina è attratto verso il punto fisso P$=(0, a)$ da una forza elastica $\underline{F} = -K\,$PC, con $K > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di A e l'angolo θ che la diagonale AC della lamina forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).
1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.
2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{a}{L} \in [0, +\infty)$.
3. Ponendo ora $\frac{a}{L} = 1$, $\frac{K}{M} = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.
N.B.: Il momento d'inerzia della lamina quadrata rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \frac{1}{6}ML^2$.

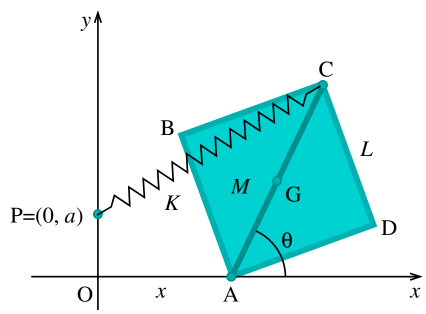

Fig. 1

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche. Data la trasformazione

$$Q = 2\,(36)^{\gamma}\,P^{2\gamma}\,e^{(\alpha-2\beta\gamma)\,q}$$
$$p = 36\,P^2\,e^{-2\beta\,q}$$

dalle variabili canoniche P, q alle variabili Q, p, dire per quali valori dei parametri reali α, β, γ la trasformazione è canonica. In corrispondenza di tali valori, determinare la funzione generatrice $F_2(q, P)$ della trasformazione canonica.

Esercizio 3: Relatività ristretta.
Si risolva il seguente problema nell'ambito della relatività ristretta. Sia dato, in un sistema di riferimento inerziale, un sistema di coordinate spazio-temporale (ct, x, y, z). Siano dati i due eventi

$$E_1 = (2\alpha, 1, \alpha, 3)\,, \qquad E_2 = (\alpha, 1, 1, 3)$$

1. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 sono contemporanei, e, per questi valori di α, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

2. Indicare per quali valori del parametro reale α esiste un sistema di riferimento nel quale gli eventi E_1, E_2 avvengono nella stessa posizione e, per questi valori di α, determinare una trasformazione di coordinate tra tale riferimento e il riferimento di partenza.

3. Nel caso $\alpha = 2$, determinare la separazione temporale tra gli eventi nel sistema di riferimento in cui questi avvengono nella stessa posizione.

Soluzione del Compito di Meccanica Analitica e Relativistica del 25 giugno 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

Esercizio 1: Meccanica Lagrangiana.
1. Si ha $x_G = x + \frac{\sqrt{2}}{2}L\cos\theta$, $y_G = \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta$, $x_C = x + \sqrt{2}L\cos\theta$, $y_C = \sqrt{2}L\sin\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M\left(\dot{x}^2 + \frac{2}{3}L^2\,\dot{\theta}^2 - \sqrt{2}L\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right).$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_C - x_P)^2 + (y_C - y_P)^2\right] = \frac{1}{2}K\left(x^2 + 2\sqrt{2}Lx\cos\theta - 2\sqrt{2}La\sin\theta\right) + \frac{1}{2}K\left(2L^2 + a^2\right).$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$M\left(\ddot{x} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\left(x + \sqrt{2}L\cos\theta\right),$$

$$M\left(\frac{2}{3}L^2\,\ddot{\theta} - \frac{\sqrt{2}}{2}L\sin\theta\,\ddot{x}\right) = \sqrt{2}KL\left(x\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\left(x + \sqrt{2}L\cos\theta\right), \qquad \partial_\theta U = -\sqrt{2}KL\left(x\sin\theta + a\cos\theta\right).$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\sqrt{2}L\cos\theta, \qquad \left(\sqrt{2}L\sin\theta - a\right)\cos\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\cos\theta_1 = 0$, $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ e $x_1 = 0$.
La seconda posizione di equilibrio è $\cos\theta_2 = 0$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ e $x_2 = 0$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\cos\theta \neq 0$, $\sin\theta_{3,4} = \frac{\sqrt{2}a}{2L}$, $\cos\theta_3 > 0$ e $\cos\theta_4 < 0$, cioè $x_3 = -\sqrt{2L^2 - a^2}$ e $x_4 = \sqrt{2L^2 - a^2}$. Poiché la traccia assegna $a \geq 0$, aueste due posizioni esistono solo se

$$0 \leq \frac{\sqrt{2}a}{2L} < 1 \qquad \Rightarrow \qquad 0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \sqrt{2}KL\left(a\sin\theta - x\cos\theta\right), \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -\sqrt{2}KL\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $\sqrt{2}K^2L(a - \sqrt{2}L)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{a}{L} > \sqrt{2}$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-\sqrt{2}K^2L(a + \sqrt{2}L)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{a}{L} \geq 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $2K^2L^2\cos^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}$.
Riassumendo, per $0 \leq \frac{a}{L} < \sqrt{2}$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{a}{L} > \sqrt{2}$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \frac{2}{3}ML^2, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}ML\sin\theta = -\frac{1}{2}Ma.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = K, \qquad U_{\theta\theta} = 2KL^2, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -Ka.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$2\left(\frac{K}{M} - \omega^2\right)\left(\frac{K}{M} - \frac{1}{3}\omega^2\right) - \left(\frac{a}{L}\right)^2\left(\frac{K}{M} - \frac{1}{2}\omega^2\right)^2 = 0,$$

Sostituendo i valori si trova l'equazione biquadratica

$$5\,\omega^4 - 20\,\omega^2 + 12 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = 2\left(1 \pm \frac{\sqrt{10}}{5}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = 3.265,\, \omega_-^2 = 0.735.$$

Quindi le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = 1.807$ e $\omega_- = 0.857$.

Esercizio 2: Trasformazioni canoniche.
Esprimendo Q e P come funzioni di q e p otteniamo:

$$Q = 2\,e^{\alpha q}\,p^\gamma,$$
$$P = \frac{1}{6}\,e^{\beta q}\,p^{1/2}.$$

Imponendo che la parentesi di Poisson $[Q,P]_{qp}$ sia uguale ad 1 si ottiene $\alpha = -\beta = 3$ e $\gamma = \frac{1}{2}$. Sappiamo che

$$dF_2(q,P) \;=\; p\,dq \;+\; Q\,dP.$$

Per ottenere $F_2(q,P)$ bisogna quindi esprimere p e Q come funzioni di q e P. Otteniamo:

$$p = 36\,e^{6q}\,P^2,$$
$$Q = 12\,P\,e^{6q},$$

ed integrando $p\,dq$ o, alternativamente, $Q\,dP$ otteniamo

$$F_2(q,P) = 6\,e^{6q}\,P^2.$$

Esercizio 3: Relatività ristretta.
La separazione tra i due eventi è

$$\Delta E = (\alpha, 0, \alpha - 1, 0)\,.$$

L'intervallo spazio-temporale è

$$\Delta E^2 = \alpha^2 - (\alpha-1)^2 = 2\alpha - 1\,.$$

1. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi sono contemporanei se $\Delta E^2 < 0$ ovvero $\alpha < \frac{1}{2}$. La trasformazione di coordinate tra questo riferimento e quello di partenza è la trasformazione di Lorentz speciale con $\vec{v} = (0, \beta c, 0)$, tale che

   $$\Delta E_0' = \gamma(\Delta E_0 - \beta \Delta E_2) = \gamma(\alpha - \beta(\alpha - 1)) = 0$$

   ovvero

   $$\beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\,.$$

2. Esiste un sistema di riferimento in cui i due eventi avvengono nella stessa posizione se $\Delta E^2 > 0$ ovvero $\alpha > \frac{1}{2}$. La trasformazione di coordinate tra questo riferimento e quello di partenza è la trasformazione di Lorentz speciale con $\vec{v} = (0, \beta c, 0)$, tale che

   $$\Delta E_2' = \gamma(\Delta E_2 - \beta \Delta E_0) = \gamma(\alpha - 1 - \beta\alpha) = 0$$

   ovvero

   $$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha}\,.$$

3. Se $\alpha = 2$, per

$$\beta = \frac{\alpha - 1}{\alpha} = \frac{1}{2}$$

gli eventi avvengono nella stessa posizione, con separazione temporale

$$\Delta E_0' = \gamma(\Delta E_0 - \beta \Delta E_2) = \gamma(\alpha - \beta(\alpha - 1)) = 0\,.$$

Essendo $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 2/\sqrt{3}$, $\Delta E_0' = \frac{2}{\sqrt{3}}(2 - 1/2) = \sqrt{3}$. A questo risultato si arrivava anche osservando che nel riferimento in cui $\Delta E_2' = 0$, $\Delta E_0' = \sqrt{\Delta E^2} = \sqrt{2\alpha - 1} = \sqrt{3}$.