Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 22.06.2018

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche non interagenti contenute in un cilindro $\mathcal{C}_{R,L}$ di base circolare con raggio R ed altezza L. Sia l'Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{p^2}{2m} - U_0 \frac{z}{L}, \qquad \boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z) \in \mathbb{R}^3, \ \boldsymbol{q} = (x, y, z) \in \mathcal{C}_{R,L}$$

dove $p = |\boldsymbol{p}|$, z indica la posizione lungo l'asse del cilindro misurata da una delle due sue basi, ed U_0 è una costante positiva. In sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che il sistema sia descrivibile dalla statistica classica:
   - 1.a) Calcolare il calore specifico C_V in funzione della temperatura T, ed il suo valore nel limite $T \to 0$ e $T \to \infty$.
   - 1.b) Calcolare il valore medio $\langle z \rangle$ della coordinata z in funzione della temperatura.
   - 1.c) Calcolare la densità di probabilità $\mathcal{P}(\epsilon)$ dell'energia di singola particella.
   - 1.d) Calcolare la probabilità $\mathcal{P}_N(n, \Omega)$ di trovare $n \leq N$ particelle nel dominio $\Omega := \{p_x > 0, y < 0, z < L/2\}$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Discutere l'esistenza o meno della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Determinare il valore del potenziale chimico μ nei limite di bassa temperatura $T \ll 1$ e alta temperatura $T \gg 1$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare la densità ρ del sistema in funzione dell'energia di Fermi ϵ_{F}.
   - 3.b) Calcolare $\langle z \rangle$ a $T = 0$ per $\epsilon_{\mathrm{F}} = 0$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 3, 1.c: 4, 1.d: 4
  2.a: 4 , 2.b: 4
  3.a: 4, 3.b: 3

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a

$$\boxed{C_V/N = \frac{\partial}{\partial T}\frac{E}{N} = \frac{5}{2} - \left(\frac{\beta U_0}{1-e^{-\beta U_0}}\right)^2 e^{-\beta U_0}}$$

$$\boxed{\lim_{T\to 0} C_V = \frac{5}{2}N.}$$

$$\boxed{\lim_{T\to \infty} C_V = \frac{3}{2}N.}$$

1.b

$$\boxed{\langle z\rangle = L\left[\frac{1}{1-e^{-\beta U_0}} - \frac{1}{\beta U_0}\right].}$$

1.c

$$\boxed{\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{4\beta^{5/2}}{3\sqrt{\pi}}\,\frac{\big(\epsilon+U_0\big)^{3/2}\,\theta\big(\epsilon+U_0\big) - \epsilon^{3/2}\,\theta\big(\epsilon\big)}{e^{\beta U_0}-1}\,e^{-\beta\epsilon}.}$$

1.d

$$\boxed{\mathcal{P}_N(n,\Omega) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\,p_\Omega^n(1-p_\Omega)^{N-n}, \quad \text{dove} \quad p_\Omega = \frac{1}{4}\frac{e^{\beta U_0/2}-1}{e^{\beta U_0}-1}.}$$

ovvero:

$$\boxed{\mathcal{P}_N(n,\Omega) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\,\frac{\big[e^{\beta U_0/2}-1\big]^n\,\big[4e^{\beta U_0}-e^{\beta U_0/2}-3\big]^{N-n}}{4^N\big[e^{\beta U_0}-1\big]^N}.}$$

2.a

$\boxed{\text{Esiste la condensazione di Bose-Einstein.}}$

2.b

$$\boxed{\mu(T) = -U_0 \qquad T \ll 1.}$$

$$\boxed{\mu(T) = -T\ln\left[\left(\frac{2\pi m}{h^2}\right)^{3/2}\frac{\pi R^2 L}{N U_0}\,T^{5/2}\right] - T\ln\big[e^{\beta U_0}-1\big], \qquad T \gg 1.}$$

3.a

$$\boxed{\rho = \frac{N}{\pi R^2 L} = \frac{16\pi(2m)^{3/2}}{15h^3U_0}\left[\big(\epsilon_\mathrm{F}+U_0\big)^{5/2}\,\theta\big(\epsilon_\mathrm{F}+U_0\big) - \epsilon_\mathrm{F}^{3/2}\,\theta\big(\epsilon_\mathrm{F}\big)\right].}$$

3.b

$$\boxed{\langle z\rangle = \frac{5}{7}L.}$$