Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 11.07.2018

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche di massa m vincolate a muoversi su un piano. Le particelle, non interagenti, si muovono in un potenziale centrale con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{p^2}{2m} + Ar^4, \qquad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} = \in \mathbb{R}^2,$$

dove $p = |\boldsymbol{p}|$, $r = |\boldsymbol{q}|$, ed A è una costante positiva. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che il sistema sia descrivibile dalla statistica classica:
   - 1.a) Calcolare l'energia media E in funzione della temperatura T.
   - 1.b) Calcolare l'entropia microcanonica $S(E)$ in funzione della temperatura.
   - 1.c) Calcolare il valore medio e la varianza delle fluttuazioni della distanza r delle particelle dall'origine.
   - 1.d) Calcolare il il valore più probabile r^* della distanza r in funzione della temperatura.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Determinare la temperatura T^* per la quale metà delle particelle si trovano nello stato condensato.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare l'energia di Fermi ϵ_{F} in funzione del numero di particelle del sistema.
   - 3.b) Calcolare $\langle r \rangle$ a $T = 0$ in funzione dell'energia di Fermi..

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 3
  2.a: 4 , 2.b: 4
  3.a: 4, 3.b: 3

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a

$$\boxed{E/N = \frac{3}{2}T.}$$

1.b

$$\boxed{S(E) = N \ln \left[\frac{\pi^{5/2} e^{5/2} m}{h^2 N A^{1/2}} \left(\frac{2E}{3N} \right)^{3/2} \right].}$$

1.c

$$\boxed{\langle r \rangle = \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{T}{A} \right)^{1/4}.}$$

$$\boxed{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \left[1 - \frac{\Gamma(3/4)^2}{\sqrt{\pi}} \right] \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{T}{A} \right)^{1/2}.}$$

1.d

$$\boxed{r^* = \left(\frac{T}{4A} \right)^{1/4}.}$$

2.a

$$\boxed{\int_0^{+\infty} d\epsilon \, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1} = \frac{\pi^{5/2} m}{h^2 A^{1/2} \beta^{3/2}} \zeta(3/2) < \infty, \quad \Rightarrow \text{Esiste condensazione BE.}}$$

2.b

$$\boxed{T^* = \frac{T_0}{2^{2/3}} = \left(\frac{h^2 N A^{1/2}}{2\pi^{5/2} m \, \zeta(3/2)} \right)^{2/3}.}$$

3.a

$$\boxed{\epsilon_\mathrm{F} = \left(\frac{3h^2 N A^{1/2}}{8\pi^2 m} \right)^{2/3}.}$$

3.b

$$\boxed{\langle r \rangle = \frac{4}{7} \left(\frac{\epsilon_\mathrm{F}}{A} \right)^{1/4}.}$$