Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 06.11.2018

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, che si muovono nella regione piana $D : [-\infty < x < +\infty; -L/2 \leq y \leq L/2]$ con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x + y)^2, \qquad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^2,$$

dove $p = |\boldsymbol{p}|$. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:
   - 1.a) Calcolare in calore specifico a volume costante C_V in funzione della temperatura T.
   - 1.b) Calcolare l'entropia microcanonica $S(E)$ in funzione dell'energia E.
   - 1.c) Calcolare il potenziale chimico μ.
   - 1.d) Calcolare la densità di probabilità $\mathcal{P}(\epsilon)$, il valore medio $\langle \epsilon \rangle$ e la varianza σ_ϵ^2 dell'energia di una particella.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e calcolare la temperatura di transizione T_0.
   - 2.b) Calcolare la frazione media di particelle che si trovano nello stato fondamentale a $T = T_0/2$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare il valore massimo di N tale che, a temperatura nulla, per tutte le particelle si abbia $|x| \leq L/2$.
   - 3.b) Calcolare il valore medio della coordinata y delle particelle a temperatura nulla.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
  2.a: 4, 2.b: 3
  3.a: 4, 3.b: 3

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_{B} è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a)

$$\boxed{C_{\mathrm{V}} = \frac{3}{2} N}$$

1.b)

$$\boxed{S(E) = N \ln \left[\frac{(2\pi)^{3/2} e^{5/2} \sqrt{m}\, L}{h^2 \omega N} \left(\frac{2E}{3N} \right)^{3/2} \right].}$$

1.c)

$$\boxed{\mu = -T \ln \left[\frac{(2\pi)^{3/2} \sqrt{m} L}{h^2 \omega \beta^{3/2} N}. \right].}$$

1.d)

$$\boxed{\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{2\beta^{3/2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\epsilon}\, e^{-\beta\epsilon} \theta(\epsilon).}$$

$$\boxed{\langle \epsilon \rangle = \frac{3}{2} T.}$$

$$\boxed{\sigma_\epsilon^2 = \langle \epsilon^2 \rangle - \langle \epsilon \rangle^2 = \frac{3}{2} T^2.}$$

2.a)

$$\boxed{\lim_{\mu \to 0} \int_0^{+\infty} d\epsilon \, \frac{\sqrt{\epsilon}}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} < \infty \qquad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

$$\boxed{T_0 = \left[\frac{h^2 \omega N}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{m}\, \xi(3/2)\, L} \right]^{2/3}.}$$

2.b)

$$\boxed{\left. \frac{N_0(T)}{N} \right|_{T = T_0/2} = 1 - 2^{-3/2}.}$$

3.a)

$$\boxed{N = \frac{8\pi m^2 \omega^2 L^4}{3h^2}.}$$

3.b)

$$\boxed{\langle y \rangle = 0.}$$