Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 30.01.2019

Si consideri un sistema unidimensionale costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p, q) = A|p| + B(a - q), \qquad -\infty < p < +\infty,\ 0 \leq q \leq a,$$

con A a B costanti positive. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:

   1.a) Calcolare in calore specifico a volume costante $C_{\mathrm{V}}(T)$ in funzione della temperatura T.

   1.b) Calcolare il potenziale chimico $\mu(T)$ in funzione della temperatura T.

   1.c) Determinare il valore r^* tale che la probabilità $\mathcal{P}(q < r)$ che q sia minore di r sia uguale alla probabilità $\mathcal{P}(q > r)$ che q sia maggiore di r.

   1.d) Calcolare la probabilità $P_N(n; \epsilon < 0)$ che $n \leq N$ particelle abbiano energia ϵ minore di $Ba/2$.

2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:

   2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.

   2.b) Scrivere esplicitamente, senza risolvere, l'equazione che determina la temperatura di condensazione T_0. Risolvere l'equazione nel limite $Ba/T_0 \gg 1$. Discutere la condizione che deve soddisfare N affinchè questo limite sia consistente.

3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:

   3.a) Determinare l'energia di Fermi ϵ_{F} in funzione del numero di particelle.

   3.b) Scrivere esplicitamente, senza risolvere, l'equazione che determina il potenziale chimico μ. Risolvere l'equazione nel limite $T \gg 1$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
  2.a: 4, 2.b: 3
  3.a: 4, 3.b: 3

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_{B} è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a)

$$\boxed{C_{\mathrm{V}}(T)/N = 2 - \left[\frac{\beta Ba}{e^{\beta Ba} - 1}\right]^2 e^{\beta Ba} = 2 - \left[\frac{\beta Ba}{e^{\beta Ba/2} - e^{-\beta Ba/2}}\right]^2.}$$

1.b)

$$\boxed{\mu = -T \ln\left[\frac{2}{hAB\beta^2}\left[1 - e^{-\beta Ba}\right]\right].}$$

1.c)

$$\boxed{r^* = \frac{1}{\beta B} \ln\left[\frac{1}{2}\left(e^{\beta Ba} + 1\right)\right].}$$

1.d)

$$\boxed{P_N(n; \epsilon < 0) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!} \left[\frac{1 + \beta Ba/2 - e^{-\beta Ba/2}}{e^{\beta Ba/2} - e^{-\beta Ba/2}}\right]^N \left[\frac{e^{\beta Ba/2} - 1 - \beta Ba/2}{1 + \beta Ba/2 - e^{-\beta Ba/2}}\right]^n.}$$

2.a)

$$\boxed{\lim_{\mu \to 0} \left[\int_0^\infty d\epsilon \, \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} - \int_{Ba}^\infty d\epsilon \, \frac{\epsilon - Ba}{e^{\beta(\epsilon-\mu)} - 1}\right] < \infty \quad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

2.b)

$$\boxed{N = \frac{2T_0^2}{hAB}\left[\frac{\pi^2}{6} - \int_0^\infty dy \, \frac{y}{e^{y + \beta_0 Ba} - 1}\right].}$$

$$\boxed{T_0 \sim \sqrt{\frac{3hABN}{\pi^2}} + O(e^{-Ba/T_0}), \quad T_0 \ll Ba.}$$

$$\boxed{N \ll \frac{\pi^2 Ba^2}{3hA}.}$$

3.a)

$$\boxed{\epsilon_{\mathrm{F}} = \begin{cases} \sqrt{hABN/2}, & N < \dfrac{2Ba^2}{hA}, \\[2ex] \dfrac{Ba}{2} + \dfrac{hA}{4a} N, & N > \dfrac{2Ba^2}{hA}. \end{cases}}$$

3.b)

$$\boxed{\int_0^\infty dy \, \frac{y}{z^{-1} e^y + 1} - \int_0^\infty dy \, \frac{y}{z^{-1} e^{y + \beta Ba} + 1} = \frac{hAB\beta^2}{4} N}$$

$$\boxed{\mu \sim -T \ln\left[\frac{4}{hAB\beta^2 N}\left[1 - e^{-\beta Ba}\right]\right] + \frac{hAB\beta N}{4} \frac{1 + e^{-\beta Ba}}{1 - e^{-\beta Ba}} \quad T \gg 1.}$$