Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 13.02.2019

Si consideri un gas perfetto bidimensionale composto da N molecole biatomiche uguali non interagenti, ciascuna composta da due particelle uguali di massa m, con Hamiltoniana di singola molecola:

$$H(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p_2}, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{k}{2}|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|^2, \qquad p_{1,2} = |\boldsymbol{p}_{1,2}|,$$

dove k è una costante positiva. Il gas, contenuto in volume quadrato di lato L, è a contatto con un bagno termico a temperatura T. Si assuma $\langle r \rangle \ll L$, dove $r = |\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|$ è la distanza tra le due particelle.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:
   - 1.a) Calcolare il calore specifico a pressione costante $C_{\mathrm{P}}(T)$ in funzione della temperatura T.
   - 1.b) Calcolare l'entropia microcanonica $S(E)$ in funzione dell'energia E.
   - 1.c) Calcolare il valore medio $\langle r \rangle$ della distanza $r = |\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2|$ tra le due particelle in funzione della temperatura T e determinare per quali temperature la condizione $\langle r \rangle \ll L$ è soddisfatta.
   - 1.d) Calcolare il valore medio della funzione $f(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = p_1^2\, r^2$ in funzione della temperatura T.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Mostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e determinare la temperatura di condensazione T_0.
   - 2.b) Calcolare l'entropia $S(T)$ in funzione della temperatura per $T < T_0$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare l'energia di Fermi ϵ_{F} in funzione della densità delle molecole
   - 3.b) Calcolare il valore medio $\langle p_1^2 \rangle$, con $p_1 = |\boldsymbol{p}_1|$, a $T = 0$ in funzione dell'energia di Fermi.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
  2.a: 4, 2.b: 3
  3.a: 4, 3.b: 3

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_{B} è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a)

$$\boxed{C_{\mathrm{P}}(T) = 4N.}$$

1.b)

$$\boxed{S(E) = N \ln \left[\frac{4\pi^3 m^2 e^4}{h^4 k} \frac{V}{N} \left(\frac{E}{3N} \right)^3 \right].}$$

1.c)

$$\boxed{\langle r \rangle = \sqrt{\frac{\pi T}{2k}}.}$$

$$\boxed{T \ll \frac{2kV}{\pi}, \quad V = L^2.}$$

1.d)

$$\boxed{\langle f(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) \rangle = \frac{4m}{k} T^2.}$$

2.a)

$$\boxed{\lim_{\mu \to 0} \int_0^{+\infty} d\epsilon \frac{\epsilon^2}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} - 1} < \infty \quad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

$$\boxed{T_0 = \left[\frac{h^4 k}{4\pi^3 m^2 \zeta(3)} \frac{N}{V} \right]^{1/3}}$$

2.b)

$$\boxed{S(T) = 4N \frac{\zeta(4)}{\zeta(3)} \left(\frac{T}{T_0} \right)^3 = \frac{16\pi^3 m^2 \zeta(4)}{h^4 k} V T^3, \qquad T < T_0.}$$

3.a)

$$\boxed{\epsilon_{\mathrm{F}} = \left[\frac{3h^4 k}{4\pi^3 m^2} \rho \right]^{1/3}, \qquad \rho = N/V.}$$

3.b)

$$\boxed{\langle p_1^2 \rangle = \frac{m}{2} \epsilon_{\mathrm{F}}.}$$