Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 07.05.2019

Si consideri un gas perfetto unidimensionale costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, che si muovono nella regione lineare $-L \leq q \leq L$ con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + bq, \qquad |p| < +\infty,\ |q| \leq L,$$

dove b è una costante positiva. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:
   - 1.a) Calcolare in calore specifico a volume costante C_{V} in funzione della temperatura T.
   - 1.b) Indicato con $\langle f^2 \rangle_c = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2$, verificare la relazione: $C_{\mathrm{V}}/N = (\beta/2m)^2 \langle p^4 \rangle_c + (\beta b)^2 \langle q^2 \rangle_c$.
   - 1.c) Calcolare il potenziale chimico $\mu(T)$ nel limite $T \to 0$.
   - 1.d) Calcolare il numero $N(\epsilon < bL)$ ed $N(\epsilon > bL)$ di particelle con energia di singola particella rispettivamente minore e maggiore di bL.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e scrivere l'equazione che determina la temperatura di transizione T_0.
   - 2.b) Calcolare il calore specifico a volume costante C_{V} in funzione della temperatura nel limite $T \ll 1$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare la densità di particelle in funzione dell'energia di Fermi ϵ_{F}.
   - 3.b) Calcolare il valore medio $\langle q \rangle$ a temperatura nulla ed energia di Fermi $\epsilon_{\mathrm{F}} = bL$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
  2.a: 4, 2.b: 3
  3.a: 4, 3.b: 3

<u>Nota</u>: Ai punti 1.d, 2.a e 2.b lasciare indicati gli integrali eventualmente non esprimibili con funzioni elementari.

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) Per un sistema di particelle indipendenti si ha:

$$E(T) = -N \frac{\partial}{\partial \beta} T \ln Z_1$$

da cui usando:

$$Z_1 = \frac{\sqrt{2\pi m}}{hb} \beta^{-3/2} \left[e^{\beta b L} - e^{-\beta b L} \right]$$

si ha

$$\boxed{C_\mathrm{V} = \frac{\partial}{\partial T}\bigg|_{L,N} E(T) = N \left[\frac{3}{2} - \frac{(\beta b L)^2}{\sinh^2(\beta b L)} \right].}$$

1.b) Da

$$\mathcal{P}(p) \propto e^{-\beta p^2/2m} \quad \text{e} \quad \mathcal{P}(q) \propto e^{-\beta b q}$$

segue:

$$\boxed{\langle p^4 \rangle_c = 2 \left(\frac{m}{\beta} \right)^2}$$

$$\boxed{\langle q^2 \rangle_c = \frac{1}{(\beta b)^2} - \frac{L^2}{\sinh^2(\beta b L)}}$$

che sostituite nella relazione richiesta fornisce espressione 1.a).

1.c) Per un sistema di particelle indipendenti si ha:

$$\mu(T) = -T \ln \frac{Z_1}{N} = -T \ln \left[\frac{2\sqrt{2\pi m} \sinh(\beta b L)}{N h b \beta^{3/2}} \right]$$

da cui

$$\boxed{\lim_{T \to 0} \mu(T) = -bL.}$$

1.d) Usando:

$$\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}}{\int d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}} = \frac{\beta^{3/2}}{\sqrt{\pi}\, \sinh(\beta b L)} \left[\sqrt{\epsilon + bL}\, \theta(\epsilon + bL) - \sqrt{\epsilon - bL}\, \theta(\epsilon - bL) \right] e^{-\beta\epsilon}$$

si ha:

$$\boxed{N(\epsilon < bL) = N \int_{-\infty}^{bL} d\epsilon\, \mathcal{P}(\epsilon) = \frac{N\, e^{\beta b L}}{\sqrt{\pi}\, \sinh(\beta b L)} \int_0^{2\beta b L} dy\, y^{1/2}\, e^{-y}}$$

$$\boxed{N(\epsilon > bL) = N - N(\epsilon < bL) = N \left[1 - \frac{e^{\beta b L}}{\sqrt{\pi}\, \sinh(\beta b L)} \int_0^{2\beta b L} dy\, y^{1/2}\, e^{-y} \right]}$$

2.a) A $T = T_0$ si ha:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta_0(\epsilon + bL)} - 1}$$

Usando:

$$G(\epsilon) = \frac{2\sqrt{2m}}{hb} \left[\sqrt{\epsilon + bL}\,\theta(\epsilon + bL) - \sqrt{\epsilon - bL}\,\theta(\epsilon - bL)\right]$$

si ha:

$$\boxed{N = \frac{\sqrt{2\pi m}}{hb} T_0^{3/2} \left[\zeta(3/2) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} dy \, \frac{y^{1/2}}{e^{y + 2\beta_0 bL} - 1}\right] < \infty \quad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

2.b) Per $T < T_0$ si ha:

$$E(T) = -bLN_0(T) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \, \frac{\epsilon\, G(\epsilon)}{e^{\beta_0(\epsilon + bL)} - 1} = -bLN + \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \, \frac{(\epsilon + bL)\, G(\epsilon)}{e^{\beta_0(\epsilon + bL)} - 1},$$

da cui

$$\boxed{C_{\mathrm{V}} = \frac{\partial}{\partial T} E(T) = 2\frac{\sqrt{2m}}{hb}\, T^{3/2} \int_0^{\infty} dy \, \frac{y^3/2}{(e^y - 1)^2} + O(e^{-4\beta bL}), \qquad T \ll 1.}$$

3.a) A $T = 0$ si ha:

$$N = 2 \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon \, G(\epsilon)$$

da cui:

$$\boxed{\rho = \frac{N}{2L} = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{2m}}{hb} \left[(\epsilon + bL)^{3/2}\, \theta(\epsilon + bL) - (\epsilon - bL)^{3/2}\, \theta(\epsilon - bL)\right]}$$

3.b) A $T = 0$ si ha:

$$\langle q \rangle = \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} dq \, q \, G(\epsilon, q)$$

Usando:

$$G(\epsilon, q) = \frac{\sqrt{2m}}{h} \, \frac{\theta(\epsilon - bq)}{\sqrt{\epsilon - bq}} \, \theta(L - |q|)$$

si ha:

$$\boxed{\langle q \rangle = -\frac{L}{5}}$$