Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 28.06.2019

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, contenute in una sfera di raggio R e con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(r), \qquad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3,$$

dove $p = |\boldsymbol{p}|$, $r = |\boldsymbol{q}|$ e

$$V(r) = \begin{cases} \alpha r^3 & 0 \leq r \leq R, \\ +\infty & r > R. \end{cases}$$

con α costante e positiva. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:
   - 1.a) Calcolare in calore specifico a volume costante C_V in funzione della temperatura T.
   - 1.b) Calcolare la pressione $P(R)$ sulla superficie della sfera.
   - 1.c) Calcolare il valore medio $\langle r \rangle$ della distanza r delle particele dal centro della sfera nel limite $T \ll 1$.
   - 1.d) Calcolare la temperatura T^* tale che in media vi siano $3N/4$ particelle con $r < R/2^{1/3}$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein e scrivere l'equazione che determina la temperatura di transizione T_0.
   - 2.b) Calcolare l'energia media $E(T)$ in funzione della temperatura nel limite $T \ll 1$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare la densità di particelle in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F.
   - 3.b) Calcolare il valore medio $\langle r^3 \rangle$ a temperatura nulla ed energia di Fermi $\epsilon_\mathrm{F} = \alpha R^3$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
  2.a: 4, 2.b: 3
  3.a: 4, 3.b: 3

Nota: Al punto 2.a lasciare indicati gli integrali eventualmente non esprimibili con funzioni elementari.

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann $k_{\rm B}$ è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) Per un sistema di particelle indipendenti si ha:

$$E(T) = -N \frac{\partial}{\partial \beta} T \ln Z_1$$

da cui usando:

$$Z_1 = \left(\frac{2\pi m}{\beta h^2} \right)^{3/2} \frac{4\pi}{3\beta\alpha} \left[1 - e^{-\beta\alpha R^3} \right]$$

si ha

$$\boxed{C_{\rm V} = \frac{\partial}{\partial T}\Big|_{L,N} E = N \left[\frac{5}{2} - \left(\frac{\beta\alpha R^3}{1 - e^{-\beta\alpha R^3}} \right)^2 e^{-\beta\alpha R^3} \right].}$$

1.b) Dalla relazione termodinamica

$$P(R) = -\frac{\partial}{\partial V}\Big|_{T,N} F(T,V,N),$$

con $F(T,V,N) = -TN \ln Z_1/N!$ e $V = (4\pi/3)R^3$, segue

$$\boxed{P(R) = \frac{3N}{4\pi} \frac{\alpha}{e^{\beta\alpha R^3} - 1}.}$$

1.c) Usando

$$\mathcal{P}(r) \propto r^2\, e^{-\beta\alpha r^3}\, \theta(R - r),$$

nel limite $T \ll 1$ si ha

$$\boxed{\langle r \rangle \sim \frac{1}{3(\beta\alpha)^{1/3}}\, \Gamma(1/3) + O(e^{-\beta\alpha R^3}), \qquad T \ll 1.}$$

1.d) La condizione richiesta si scrive:

$$N \int_0^{R/2^{1/3}} dr\, \mathcal{P}(r) = \frac{3N}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1 - e^{-\beta^* \alpha R^3/2}}{1 - e^{-\beta^* \alpha R^3}} = \frac{3}{4},$$

da cui

$$\boxed{T^* = \frac{\alpha R^3}{2 \ln 3}.}$$

2.a) A $T = T_0$ si ha:

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta_0 \epsilon} - 1}$$

Usando:

$$G(\epsilon) = \frac{16\pi^2}{9\alpha h^3} (2m)^{3/2} \left[\epsilon^{3/2}\, \theta(\epsilon) - \left(\epsilon - \alpha R^3 \right)^{3/2} \theta(\epsilon - \alpha R^3) \right],$$

si ha:

$$\boxed{N = \frac{4\pi^{5/2}}{3\alpha h^3} (2m)^{3/2}\, T_0^{5/2} \left[\zeta(5/2) - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dy\, \frac{y^{3/2}}{e^{y + \beta_0 \alpha R^3} - 1} \right] < \infty \quad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

2.b) Per $T < T_0$ si ha:

$$E(T) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \, \frac{\epsilon \, G(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon} - 1}$$

da cui

$$\boxed{E(T) = \frac{10\pi^{5/2}}{3\alpha h^3} (2m)^{3/2} \, \zeta(7/2) \, T^{7/2} + O(e^{-\beta\alpha R^3}), \qquad T \ll 1.}$$

3.a) A $T = 0$ si ha:

$$N = 2 \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon \, G(\epsilon)$$

da cui:

$$\boxed{\rho = \frac{N}{V} = \frac{16\pi}{15\alpha R^3 h^3} (2m)^{3/2} \left[\epsilon_{\mathrm{F}}^{5/2} - \left(\epsilon_{\mathrm{F}} - \alpha R^3\right)^{5/2} \theta(\epsilon_{\mathrm{F}} - \alpha R^3) \right].}$$

3.b) A $T = 0$ si ha:

$$\langle r^3 \rangle = \frac{2}{N} \int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon \int_0^{+\infty} dr \, G(\epsilon, r) \, r^3.$$

Usando:

$$G(\epsilon, r) = \frac{8\pi^2}{h^3} (2m)^{3/2} \, r^2 \, \sqrt{\epsilon - \alpha r^3} \, \theta\left(\epsilon - \alpha r^3\right) \theta(R - r).$$

si ha:

$$\boxed{\langle r^3 \rangle = \frac{2}{7} R^3.}$$