Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 15.07.2019

Si consideri un sistema costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, vincolate a muoversi su un piano, in una regione di area A, con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + m^2c^2} \qquad \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2, \boldsymbol{q} \in A \subset \mathbb{R}^2,$$

dove c è la velocità della luce. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:
   - 1.a) Calcolare la densità di probabilità $\mathcal{P}(\epsilon)$ dell'energia di singola particella.
   - 1.b) Calcolare il l'energia media per particella $E(T)/N$ in funzione della temperatura T.
   - 1.c) Calcolare l'entropia $S(T)$ in funzione della temperatura.
   - 1.d) Calcolare il valore più probabile $\bar{\epsilon}$ dell'energia di singola particella e la probabilità $P(n; N)$ che n particelle abbiano energia $\epsilon < \bar{\epsilon}$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Dimostrare l'esistenza o meno della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Mostrare che nel limite di alta temperatura $T \gg 1$ l'energia media per particella $E(T)/N$ è data dall'espressione ottenuta con la statistica classica al punto 1.b).
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare l'energia di Fermi ϵ_{F} in funzione della densità delle particelle.
   - 3.b) Calcolare l'energia media per particella $\epsilon(T) = E(T)/N$ a temperatura nulla in funzione dell'energia di Fermi ϵ_{F}.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
  2.a: 4, 2.b: 3
  3.a: 4, 3.b: 3

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_B è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) Per un sistema di particelle indipendenti si ha:

$$\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}}{\int d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon}},$$

da cui usando:

$$G(\epsilon) = \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2}\, \delta\big[\epsilon - H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})\big] = \frac{2\pi A}{h^2 c^2}\, \epsilon\, \theta(\epsilon - mc^2),$$

si ha

$$\boxed{\mathcal{P}(\epsilon) = \frac{\beta^2 \epsilon}{1 + \beta mc^2}\, e^{-\beta(\epsilon - mc^2)}\, \theta(\epsilon - mc^2).}$$

1.b) Usando la relazione

$$E/N = -\frac{\partial}{\partial\beta} \ln Z_1,$$

con

$$Z_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon},$$

valida per particelle indipendenti, si ha:

$$\boxed{E/N = \frac{2T + mc^2}{1 + \beta mc^2} + mc^2.}$$

1.c) Dalla relazione

$$S = \beta(E - F),$$

dove E è l'energia ed F è l'energia libera del sistema si ha

$$\boxed{S/N = \ln\left[\frac{2\pi A}{N\beta^2 h^2 c^2}\big(1 + \beta mc^2\big)\, e^{\frac{3 + 2\beta mc^2}{1 + \beta mc^2}}\right].}$$

1.d) Il valore richiesto è

$$\overline{\epsilon} = \underset{\epsilon}{\operatorname{argmax}}\ \mathcal{P}(\epsilon).$$

e vale

$$\boxed{\overline{\epsilon} = \begin{cases} mc^2 & T \le mc^2, \\ \\ T & T > mc^2. \end{cases}}$$

La probabilità richiesta è

$$\boxed{P(n; N) = \delta^{\mathrm{Kr}}_{n,0}, \qquad T \le mc^2,}$$

dove $\delta^{\mathrm{Kr}}_{n,0}$ è la delta di Kronecker

$$\boxed{P(n;N) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p_1^n\,(1-p_1)^{N-n}, \qquad T > mc^2}$$

con

$$\boxed{p_1 = 1 - \frac{2}{1+\beta mc^2}\, e^{\beta mc^2 - 1}.}$$

2.a)

$$\boxed{\lim_{\mu\to mc^2} \frac{2\pi A}{h^2c^2} \int_{mc^2}^{\infty} d\epsilon\, \frac{\epsilon}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} = \infty \qquad \Rightarrow \text{Non esiste condensazione BE.}}$$

2.b) Per $T \gg 1$

$$E(T) \sim z \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, \epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon} = \frac{2\pi A z}{h^2c^2}\, \beta^{-3}(2 + 2\beta mc^2 + \beta^2 m^2 c^4)\, e^{-\beta mc^2},$$

ed

$$N \sim z \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon\, G(\epsilon)\, e^{-\beta\epsilon} = \frac{2\pi A z}{h^2c^2}\, \beta^{-2}(1 + \beta mc^2)\, e^{-\beta mc^2}.$$

Eliminando z otteniamo

$$\boxed{E/N \sim \frac{2T + mc^2}{1+\beta mc^2} + mc^2, \qquad T \gg 1.}$$

3.a) A $T = 0$ si ha:

$$N = 2\int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon\, G(\epsilon)$$

da cui:

$$\boxed{\epsilon_{\rm F} = \sqrt{m^2c^4 + \frac{h^2c^2\rho}{2\pi}} = mc^2\sqrt{1 + \frac{h^2}{2\pi m^2 c^2}\,\rho}\,.}$$

con $\rho = N/A$.

3.b) Dalla relazione

$$E(T=0) = 2\int_{-\infty}^{\epsilon_{\rm F}} d\epsilon\, G(\epsilon)\, \epsilon$$

si ha

$$E(T=0) = \frac{4\pi A}{3h^2c^2}\left[\epsilon_{\rm F}^3 - (mc^2)^3\right].$$

Da cui

$$\boxed{\epsilon(T=0) = E(T=0)/N = \frac{2}{3}\,\frac{\epsilon_{\rm F}^2 + \epsilon_{\rm F} mc^2 + (mc^2)^2}{\epsilon_{\rm F} + mc^2}.}$$