Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 10.09.2019

Si consideri un gas perfetto unidimensionale costituito da N particelle identiche, di massa m, non interagenti, con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(p, q) = c|p| + V(q),$$

dove c è una costante positiva e

$$V(q) = \begin{cases} V_0\big(q/L - 1\big), & 0 \le q \le L; \\ 0, & L \le q \le 2L; \\ +\infty, & q < 0 \text{ o } q > 2L. \end{cases}$$

con V_0 costante e positiva. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:
   - 1.a) Calcolare l'energia $E(T)$ in funzione della temperatura T. Discutere l'andamento di $E(T)$ nei limiti $T \ll 1$ e $T \gg 1$.
   - 1.b) Determinare la pressione $P(q)$ in funzione di q.
   - 1.c) Mostrare che per ogni temperatura T finita il numero di particelle $N(q < L)$ contenute nella regione $q < L$ è maggiore del numero $N(q > L)$ di particelle contenute nella regione $q > L$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Dimostrare l'esistenza della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Scrivere l'equazione che determina il potenziale chimico $\mu(T)$ in funzione della temperatura. Risolvere l'equazione nel limite $T \gg 1$ e determinare l'espressione del potenziale chimico.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare l'energia di Fermi ϵ_{F} in funzione del numero di particelle.
   - 3.b) Determinare l'energia per particella $E(T = 0)/N$ del sistema per $\epsilon_{\mathrm{F}} = 0$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 4, 1.b: 4, 1.c: 4, 1.d: 4
  2.a: 4, 2.b: 3
  3.a: 4, 3.b: 3

Nota: Ai punti 1.a) e 2.b) considerare solo il termine principale.

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann $k_{\rm B}$ è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z_N = Z_1^N/N!$ dove Z_1 è la funzione di partizione di singola particella:

$$Z_1 = \frac{2L}{hcV_0\beta^2}\left[e^{\beta V_0} + \beta V_0 - 1\right].$$

Di conseguenza dalla relazione $E/N = -(\partial/\partial\beta)\ln Z_1$ si ha:

$$\boxed{E(T)/N = 2T - V_0\frac{e^{\beta V_0}+1}{e^{\beta V_0}+\beta V_0 - 1}.}$$

$$\boxed{E(T)/N \sim -V_0 + O(T), \qquad T \ll 1.}$$

$$\boxed{E(T)/N \sim T + O(1), \qquad T \gg 1.}$$

1.b) Per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z_N = Z_1^N/N!$ con Z_1 funzione di partizione di singola particella. Ne segue che la pressione P nel punto q vale:

$$P(q) = \rho(q)\,T$$

dove $\rho(q)$ è la densità di particelle nel punto q:

$$\rho(q) = \frac{N}{L}\,\frac{\beta V_0}{e^{\beta V_0}+\beta V_0 - 1}\,e^{-\beta V(q)}.$$

Di conseguenza:

$$\boxed{P(q) = \begin{cases} \dfrac{N}{L}\,\dfrac{V_0}{e^{\beta V_0}+\beta V_0 - 1}\,e^{-\beta V_0(q/L-1)}, & 0 \le q \le L; \\[2ex] \dfrac{N}{L}\,\dfrac{V_0}{e^{\beta V_0}+\beta V_0 - 1}, & L \le q \le 2L; \\[2ex] 0, & q < 0 \text{ o } q > 2L. \end{cases}}$$

1.c) Utilizzando l'espressione di $\rho(q)$ ricavata al punto precedente si ha:

$$\frac{N(q>L)}{N(q<L)} = \frac{\beta V_0}{e^{\beta V_0} - 1},$$

per cui

$$\boxed{\frac{N(q>L)}{N(q<L)} < \lim_{\beta\to 0}\frac{N(q>L)}{N(q<L)} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad N(q>L) < N(q<L).}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-V_0}^{+\infty} d\epsilon\,\frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon+V_0)} - 1} = N < \infty,$$

dove

$$G(\epsilon) = \int \frac{dp\,dq}{h}\,\delta\big(\epsilon - H(p,q)\big) = \frac{2L}{hcV_0}\Big[(\epsilon+V_0)\,\theta(\epsilon+V_0) - (\epsilon - V_0)\,\theta(\epsilon)\Big].$$

Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu\to -V_0}\left[\int_{-V_0}^{\infty} d\epsilon\,\frac{\epsilon+V_0}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} - \int_0^{\infty} d\epsilon\,\frac{\epsilon-V_0}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\right] < \infty \quad \Rightarrow \text{ Esiste condensazione BE.}}$$

2.b) Per T maggiore della temperatura di condensazione T_0 si ha

$$N = \int_{-V_0}^{+\infty} d\epsilon \, \frac{G(\epsilon)}{z^{-1} e^{\beta\epsilon)} - 1},$$

dove $z = e^{\beta\mu}$, da cui segue l'equazione

$$\frac{NhcV_0\beta^2}{2L} = \int_0^\infty dy \, \frac{y}{z^{-1} e^{y-\beta V_0} - 1} - \int_0^\infty dy \, \frac{y - \beta V_0}{z^{-1} e^{y} - 1},$$

ovvero

$$\boxed{\frac{NhcV_0\beta^2}{2L} = -\int_0^\infty dy \, \ln\left[1 - z e^{\beta V_0 - y}\right] + \int_0^\infty dy \, \ln\left[1 - z e^{-y}\right] - \beta V_0 \ln(1 - z), \qquad T \geq T_0,}$$

che risolta per z fornisce il potenziale chimico per $T \geq T_0$.
Per $T \geq T_0$ il potenziale chimico è costante e vale

$$\boxed{\mu(T) = -V_0, \qquad T \leq T_0.}$$

Nel limite $T \gg 1$ si ha $z \ll 1$. Risolvendo l'equazione al primo ordine in z si ha:

$$\boxed{\mu(T) = -T \ln\left[\frac{2L}{NhcV_0\beta^2}\left[e^{\beta V_0} - 1 + \beta V_0\right]\right], \qquad T \gg 1,}$$

che coincide con il risultato classico.

3.a) L'energia del sistema non dipende dal valore dello spin delle particelle, quindi

$$N = 2 \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_F} d\epsilon \, G(\epsilon),$$

da cui si ha:

$$\boxed{\epsilon_F = \begin{cases} -V_0 + \sqrt{\dfrac{NhcV_0}{2L}}, & N < \dfrac{2LV_0}{hc}, \\[2ex] -\dfrac{V_0^2}{4} + \dfrac{Nhc}{8L}, & N > \dfrac{2LV_0}{hc}. \end{cases}}$$

3.b) L'energia del sistema non dipende dal valore dello spin delle particelle, quindi per $\epsilon_F = 0$ si ha:

$$\begin{aligned} E(T=0) &= 2 \int_{-\infty}^{0} d\epsilon \, \epsilon \, G(\epsilon) \\ &= -\frac{2LV_0^2}{3hc}. \end{aligned}$$

Usando la relazione $N = 2LV_0/hc$ valida per $\epsilon_F = 0$ si ha

$$\boxed{E(T=0)/N = -\frac{V_0}{3}.}$$