Corso di Meccanica Statistica
Proff. A. Crisanti, I. Giardina e M. Grilli
Compito del 08.11.2019

Si consideri un gas perfetto costituito da N particelle identiche di massa m, non interagenti, vincolate a muoversi su un piano e con Hamiltoniana di singola particella:

$$H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}) = \frac{p^2}{2m} + V(q),$$

dove $p = |\boldsymbol{p}|$, $q = |\boldsymbol{q}|$, soggette al potenziale centrale

$$V(q) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq q \leq R; \\ 0, & R \leq q \leq 2R; \\ +\infty, & q > 2R; \end{cases}$$

con V_0 costante e positiva. Il sistema è a contatto con un bagno termico a temperatura T.

1. Assumendo che sia applicabile la statistica classica e che il sistema sia in equilibrio alla temperatura T:
   - 1.a) Calcolare l'entropia $S(T)$ in funzione della temperatura T. Discutere l'andamento di $S(T)$ nei limiti $T \ll 1$ e $T \gg 1$.
   - 1.b) Determinare la pressione $P(R)$ alla distanza $q = R$ dall'origine.
   - 1.c) Determinare la probabilità $\mathcal{P}(n;N)$ che $n \leq N$ particelle abbiano energia $\epsilon \leq 0$. Determinare il valore medio $\langle n \rangle$ la varianza σ_n^2 del numero di particelle con energia $\epsilon \leq 0$.
2. Assumendo che il sistema sia composto da Bosoni di spin 0:
   - 2.a) Discutere l'esistenza o meno della condensazione di Bose-Einstein.
   - 2.b) Determinare il potenziale chimico $\mu(T)$ e discutere i limiti $T \to 0$ e $T \to \infty$.
3. Assumendo che il sistema sia composto da Fermioni di spin 1/2:
   - 3.a) Determinare la densità di particelle ρ_0 tale che l'energia di Fermi ϵ_F si annulli.
   - 3.b) Determinare l'energia per particella $E(T = 0)/N$ per un sistema di densità $\rho = 2\rho_0$.

- Valutazione risposte:
  1.a: 5, 1.b: 5, 1.c: 4
  2.a: 5, 2.b: 3
  3.a: 4, 3.b: 4

Nota: Ai punti 1.a) e 2.b) considerare solo il termine principale.

- **Risposte**

Nota: La costante di Botzmann k_{B} è presa uguale a 1, di conseguenza $\beta^{-1} = T$.

1.a) L'entropia si può ottenere dall'energia libera F tramite la relazione $S = -(\partial/\partial T)F$. Nell'ensemble canonico si ha $F = -T \ln Z_N$, dove per un sistema di N particelle classiche non interagenti $Z_N = Z_1^N/N!$ con Z_1 funzione di partizione di singola particella:

$$Z_1 = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 \beta} \left[e^{\beta V_0} + 3\right].$$

Di conseguenza

$$\boxed{S(T)/N = \ln\left[\frac{2\pi^2 m R^2 e^2}{N h^2 \beta} \left(e^{\beta V_0} + 3\right)\right] - \beta V_0 \frac{e^{\beta V_0}}{e^{\beta V_0} + 3}.}$$

Limiti

$$\boxed{S(T)/N \sim \ln T + O(\beta V_0 e^{-\beta V_0}), \qquad T \ll 1.}$$

$$\boxed{S(T)/N \sim \ln T + O(1), \qquad T \gg 1.}$$

1.b) Considerato il sottosistema con $q \leq R$ si ha

$$P(R) = \frac{N_R}{\pi R^2} T,$$

dove N_R è il numero di particelle contenute nel sottosistema:

$$N_R = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2 \beta}\, e^{\beta(V_0 + \mu)}.$$

Il potenziale chimico μ è lo stesso del sistema totale. Utilizzando la relazione analoga alla precedente per il sistema totale μ può essere eliminato in funzione di N. Si ottiene così:

$$\boxed{P(R) = \frac{NT}{\pi R^2} \frac{e^{\beta V_0}}{e^{\beta V_0} + 3}.}$$

1.c) Per un sistema di particelle indipendenti la probabilità è data da

$$\mathcal{P}(n; N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p_0^n (1 - p_0)^{N-n},$$

dove p_0 è la probabilità che una particella abbia energia $\epsilon \leq 0$ data da

$$p_0 = \big\langle \theta(-H) \big\rangle = \int \frac{d^2p\, d^2q}{h^2 Z_1}\, e^{-\beta H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})}\, \theta(-H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})) = \frac{e^{\beta V_0} - 1}{e^{\beta V_0} + 3}.$$

per cui

$$\boxed{\mathcal{P}(n; N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{4^{N-n}\left(e^{\beta V_0} - 1\right)^n}{\left(e^{\beta V_0} + 3\right)^N}.}$$

Il valore medio di n vale

$$\boxed{\langle n \rangle = N p_0 = N \frac{e^{\beta V_0} - 1}{e^{\beta V_0} + 3}.}$$

e la varianza

$$\boxed{\sigma_n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = N p_0 (1 - p_0) = 4N \frac{e^{\beta V_0} - 1}{\left(e^{\beta V_0} + 3\right)^2}.}$$

2.a) La condizione affinchè esista la condensazione di Bose-Einstein è:

$$\int_{-V_0}^{+\infty} d\epsilon \, \frac{G(\epsilon)}{e^{\beta(\epsilon+V_0)}-1} = N < \infty,$$

dove

$$G(\epsilon) = \int \frac{d^2p \, d^2q}{h^2} \, \delta\big(\epsilon - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})\big) = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2} \Big[\theta\big(\epsilon+V_0\big) + 3\theta(\epsilon)\Big].$$

Di conseguenza

$$\boxed{\lim_{\mu\to -V_0^-} \left[\int_{-V_0}^{\infty} d\epsilon \, \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1} + \int_0^{\infty} d\epsilon \, \frac{3}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}\right] = \infty \quad \Rightarrow \text{ Non esiste condensazione BE.}}$$

2.b) Il potenziale chimico è ottenuto risolvendo l'equazione

$$N = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2} \left[\int_{-V_0}^{\infty} d\epsilon \, \frac{1}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1} + \int_0^{\infty} d\epsilon \, \frac{3}{z^{-1}e^{\beta\epsilon}-1}\right].$$

per $z = e^{\beta\mu}$, che valutando gli integrali, fornisce:

$$\boxed{(1-ze^{\beta V_0})(1-z)^3 = e^{-\beta N c}, \qquad c = \frac{h^2}{2\pi^2 m R^2}, \; z = e^{\beta\mu} \leq e^{-\beta V_0}.}$$

Per $T \to 0$ il potenziale chimico raggiunge il valore massimo possibile:

$$\boxed{\mu(T) = -V_0, \qquad T \to 0.}$$

Nel limite $T \gg 1$ si ha $z \ll 1$. Risolvendo l'equazione al primo ordine in z si ha:

$$\boxed{\mu(T) = -T \ln\left[\frac{T 8\pi^2 m R^2}{N h^2}\right], \qquad T \to \infty,}$$

che coincide con il risultato classico.

3.a) L'energia del sistema non dipende dal valore dello spin delle particelle, quindi

$$\rho = \frac{N}{V} = \frac{1}{2\pi^2 R^2} \int_{\epsilon_{\min}}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon \, G(\epsilon),$$

per cui per $\epsilon_{\mathrm{F}} = 0$ si ha:

$$\boxed{\rho_0 = \frac{m}{h^2} V_0.}$$

3.b) L'energia del sistema non dipende dal valore dello spin delle particelle, inoltre per $\rho = 2\rho_0$ si ha $\epsilon_{\mathrm{F}} = V_0/4$, per cui

$$E(T=0) = 2\int_{-\infty}^{\epsilon_{\mathrm{F}}} d\epsilon \, \epsilon \, G(\epsilon) = \frac{2\pi^2 m R^2}{h^2}\big[4\epsilon_{\mathrm{F}}^2 - V_0^2\big] = -\frac{3\pi^2 m R^2}{2h^2} V_0^2.$$

Inoltre

$$N = \frac{4\pi^2 m R^4}{h^2}\big(4\epsilon_{\mathrm{F}} + V_0\big) = \frac{8\pi^2 m R^4}{h^2} V_0,$$

per cui

$$\boxed{E(T=0)/N = -\frac{3}{16} V_0.}$$