

## S. CAPRARA - ESERCIZI DI FISICA GENERALE II - FOGLIO No 1

## I. CAMPO ELETTROSTATICO. POTENZIALE ELETTROSTATICO.

**ES. 1** Sul piano  $x, y$  sono poste tre cariche:  $Q_1 = 2Q$ , nel punto  $P_1 = (0, 0)$ ;  $Q_2 = Q$ , nel punto  $P_2 = (0, \ell)$ ;  $Q_3 = Q$ , nel punto  $P_3 = (\ell, 0)$ . Si determini il campo elettrico  $\vec{E}$  generato dalle tre cariche nel punto  $P = (\ell, \ell)$ .

**ES. 2** Sul piano  $x, y$  sono poste tre cariche:  $Q_1 = Q$ , nel punto  $A = (-a, 0)$ ;  $Q_2 = Q$ , nel punto  $B = (a, 0)$ ;  $Q_3 = 2Q$ , nel punto  $C = (0, a\sqrt{3})$ . Si determini il campo elettrico  $\vec{E}$  generato dalle tre cariche nel baricentro del triangolo  $ABC$ . [Suggerimento: osservare che il triangolo è equilatero e che  $Q_3 = Q + Q$ . Simmetria e principio di sovrapposizione possono semplificare il calcolo].

**ES. 3** Agli estremi di un segmento  $\overline{AB}$  di lunghezza  $\ell$  sono poste due cariche  $Q_1$  e  $Q_2$ , dello stesso segno. Determinare il punto  $P \in \overline{AB}$  nel quale il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da  $Q_1$  e  $Q_2$  è nullo.

**ES. 4** Sul piano  $x, y$  sono poste tre cariche:  $Q_1$ , nel punto  $P_1 = (0, 0)$ ;  $Q_2 = Q$ , nel punto  $P_2 = (0, \ell)$ ;  $Q_3 = Q$ , nel punto  $P_3 = (\ell, 0)$ . Determinare il valore di  $Q_1$  per il quale il campo elettrico  $\vec{E}$  generato dalle tre cariche si annulla nel punto  $P_4 = (\ell, \ell)$ .

**ES. 5\*** Due cariche,  $Q_1 = Q > 0$  e  $Q_2 = -Q < 0$  sono poste agli estremi di un segmento di lunghezza  $\ell$ . Questa configurazione di cariche è detta *dipolo elettrico*. Scegliendo opportunamente il sistema di riferimento, in modo che le cariche  $Q_1$  e  $Q_2$  si trovino, rispettivamente nei punti  $(0, 0, \frac{1}{2}\ell)$  e  $(0, 0, -\frac{1}{2}\ell)$  dell'asse  $z$ , si determinino il potenziale elettrostatico  $V$  e il campo elettrico  $\vec{E}$  generati dalle due cariche nel punto  $P = (x, y, z)$ . Si determini l'espressione asintotica del potenziale  $V$  quando  $R \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \gg \ell$ . [Suggerimento, si parametrizzi la posizione del punto  $P$  con le coordinate  $R$  e  $\vartheta \equiv \arccos(z/R)$ ].

**ES. 6** Il potenziale elettrostatico generato da una carica, distribuita con densità  $\rho(x', y', z')$  dentro un dominio  $\mathcal{V} \in \mathbb{R}^3$ , nel punto  $P = (x, y, z)$  è

$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(x', y', z')}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz'.$$

Utilizzando la relazione  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ , determinare il campo elettrico nel punto  $P$ .

**ES. 7** Dimostrare che, se il potenziale elettrostatico  $V$  dipende solo dalla coordinata sferica  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , allora il campo elettrico ha solo componente radiale  $E_r = -\frac{dV}{dr}$ . Dimostrare, analogamente, che ciò è vero anche nel caso in cui  $V$  dipenda solo dalla coordinata cilindrica  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**ES. 8\*\*** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente su una retta, con densità lineare  $\lambda$ , in un punto  $P$  la cui distanza dalla retta è  $R$ . Quale problema si incontrerebbe volendo determinare il potenziale elettrostatico  $V$ ? Perché?

**ES. 9\*** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente su un piano, con densità superficiale  $\sigma$ , in un punto  $P$  la cui distanza dal piano è  $R$ . Quale problema si incontrerebbe volendo determinare il potenziale elettrostatico  $V$ ? Perché?

**ES. 10\*\*** Determinare il potenziale elettrostatico  $V$  generato da una carica distribuita uniformemente dentro una sfera di raggio  $R_0$ , con densità  $\rho$ , in un punto  $P$  la cui distanza dal centro della sfera è  $R$ . Si discutano separatamente i casi  $R < R_0$  e  $R > R_0$ . Come si comporta il potenziale per  $R = R_0$ ?

**ES. 11** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  nella situazione descritta nell'esercizio precedente. Studiare la continuità del campo per  $R = R_0$ .

**ES. 12\*\*** Una carica è distribuita uniformemente, con densità lineare  $\lambda$ , sul segmento di estremi  $A = (-a, 0)$  e  $B = (a, 0)$  dell'asse  $x$ . Determinare il potenziale elettrostatico  $V$  generato da questa distribuzione di carica nel generico punto  $\bar{P} = (x, y)$  del piano  $x, y$ . Il risultato ottenuto, permette di conoscere il potenziale in ogni punto  $P = (x, y, z)$  dello spazio tridimensionale?

**ES. 13** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  nella situazione descritta nell'esercizio precedente, nel punto  $P = (x, y, z)$ .

**ES. 14\*** Determinare il potenziale elettrostatico  $V$  generato da una carica distribuita uniformemente, con densità lineare  $\lambda$ , su un anello circolare di raggio  $R_0$ , in un generico punto della retta perpendicolare al piano su cui giace l'anello e passante per il centro dell'anello.

**ES. 15\*** Una carica è distribuita uniformemente, con densità superficiale  $\sigma$ , sul cerchio di raggio  $R_0$  appartenente al piano  $x, y$ . L'origine del sistema di riferimento è fissata nel centro del cerchio. Determinare il potenziale elettrostatico  $V$  generato da questa distribuzione di carica nel generico punto  $P = (0, 0, z)$  dell'asse  $z$ . Determinare l'espressione asintotica di  $V$  per  $z \gg R_0$ .

**ES. 16** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  nel punto  $P = (0, 0, z)$ , nella situazione descritta nell'esercizio precedente.

## II. APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI GAUSS.

**ES. 17** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente su una retta con densità lineare  $\lambda$ .

**ES. 18** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente su un piano con densità superficiale  $\sigma$ .

**ES. 19** Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, si considerino due piani paralleli, caricati con cariche di segno opposto e uguale densità superficiale, posti a distanza  $d$  l'uno dall'altro. Si determini il campo elettrico  $\vec{E}$  nella regione di spazio compresa tra i due piani e nella regione esterna.

**ES. 20** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente sulla superficie di un cilindro indefinito di raggio  $R_0$  con densità superficiale  $\sigma$ . Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno del cilindro.

**ES. 21** Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, si considerino due superfici cilindriche coassiali indefinite, di raggi  $R_1$  e  $R_2$  (con  $R_1 < R_2$ ), caricate uniformemente con cariche di segno opposto. Determinare la relazione che deve intercorrere tra le due densità superficiali di carica, rispettivamente  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , affinché il campo elettrico sia diverso da zero soltanto nella regione di spazio compresa tra le due superfici cilindriche. Si determini quindi il campo elettrico  $\vec{E}$  in questa regione.

**ES. 22** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato dal sistema formato dalla superficie di un cilindro indefinito di raggio  $R_0$ , uniformemente caricata con densità superficiale di carica  $\sigma$ , e dall'asse del cilindro, uniformemente carico con densità lineare di carica  $\lambda$ . Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno del cilindro.

**ES. 23** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio  $R_0$  con densità superficiale  $\sigma$ . Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno della sfera.

**ES. 24** Utilizzando il risultato dell'esercizio precedente, si considerino due superfici sferiche concentriche, di raggi  $R_1$  e  $R_2$  (con  $R_1 < R_2$ ), caricate uniformemente con cariche di segno opposto. Determinare la relazione che deve intercorrere tra le due densità superficiali di carica, rispettivamente  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , affinché il campo elettrico sia diverso da zero soltanto nella regione di spazio compresa tra le due superfici sferiche. Si determini quindi il campo elettrico  $\vec{E}$  in questa regione.

**ES. 25\*** Si considerino i risultati degli esercizi 21 e 24 nel caso limite  $d \ll R_1, R_2$ , con  $d \equiv R_2 - R_1$  e li si confrontino con il risultato dell'esercizio 19. Si dia una giustificazione dei risultati ottenuti.

**ES. 26** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato dal sistema formato dalla superficie di una sfera di raggio  $R_0$ , uniformemente caricata con densità superficiale di carica  $\sigma$ , e da una carica puntiforme  $Q$  posta nel centro della sfera. Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno della sfera.

**ES. 27** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente dentro uno strato piano di spessore  $\delta$ , con densità  $\rho$ . Si discutano separatamente i casi del campo elettrico all'interno e all'esterno dello strato piano.

**ES. 28** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente dentro un cilindro indefinito di raggio  $R_0$ , con densità  $\rho$ . Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno del cilindro.

**ES. 29** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente dentro una sfera di raggio  $R_0$ , con densità  $\rho$ . Si discutano separatamente i casi del campo all'interno e all'esterno della sfera.

**ES. 30** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente dentro un guscio cilindrico indefinito di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ , con densità  $\rho$ . Detta  $R$  la distanza del punto in cui si calcola il campo dall'asse del guscio cilindrico, si discutano separatamente i tre casi  $R < R_1$ ,  $R_1 < R < R_2$  e  $R > R_2$ . Si studi la continuità del campo elettrico per  $R = R_1$  e  $R = R_2$ .

**ES. 31** Determinare il campo elettrico  $\vec{E}$  generato da una carica distribuita uniformemente dentro un guscio sferico di raggio interno  $R_1$  e raggio esterno  $R_2$ , con densità  $\rho$ . Detta  $R$  la distanza del punto in cui si calcola il campo dal centro del guscio sferico, si discutano separatamente i tre casi  $R < R_1$ ,  $R_1 < R < R_2$  e  $R > R_2$ . Si studi la continuità del campo elettrico per  $R = R_1$  e  $R = R_2$ .

**ES. 32** Una distribuzione di carica a simmetria cilindrica è caratterizzata dalla densità  $\rho(r) = A/r$ , per  $r \leq R_0$  e  $\rho(r) = 0$ , per  $r > R_0$ , con  $A$  parametro dimensionale. Si determinino il campo elettrico  $\vec{E}$  e il potenziale elettrostatico  $V$  generati da questa distribuzione. [N.B.: in coordinate cilindriche  $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ . L'elemento di volume è  $dV = r dr d\theta dz$ ].

**ES. 33** Una distribuzione di carica a simmetria sferica è caratterizzata dalla densità  $\rho(r) = A(R_0 - r)$ , per  $r \leq R_0$  e  $\rho(r) = 0$ , per  $r > R_0$ , con  $A$  parametro dimensionale. Si determinino il campo elettrico  $\vec{E}$  e il potenziale elettrostatico  $V$  generati da questa distribuzione. [N.B.: l'elemento di volume è  $dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ ].