S. CAPRARA - ESERCIZI DI FISICA GENERALE II - FOGLIO No 2

I. ELETTROSTATICA DEI CONDUTTORI. ELETTROSTATICA DEI DIELETTRICI.

ES. 1 Sia $\vec{E}$ il campo elettrico generato da un sistema di conduttori carichi, sia q una carica *di prova* posta nella regione di spazio circostante e sia $\vec{F}$ la risultante delle forze che i conduttori esercitano sulla carica di prova. Si spieghi perché non è propriamente corretto definire il campo elettrico generato dai conduttori tramite la relazione $\vec{F} = q\vec{E}$. Come si dovrebbe modificare la definizione di campo elettrico?
ES. 2 Si determini la più generale funzione armonica $V(x)$ dipendente dalla sola coordinata cartesiana x.
ES. 3 Si determini la più generale funzione armonica $V(r)$ dipendente in coordinate cilindriche dalla sola variabile radiale $r = \sqrt{x^2+y^2}$.
ES. 4 Si determini la più generale funzione armonica $V(r)$ dipendente in coordinate sferiche dalla sola variabile radiale $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.
ES. 5** Utilizzando il risultato dell'esercizio 2, si risolva il problema dell'elettrostatica per due strati piani conduttori indefiniti paralleli, di spessore δ_1 e δ_2, posti a distanza d, noti i potenziali V_1 e V_2 dei due conduttori. Si prenda l'asse x perpendicolare agli strati piani e siano assegnati anche i valori delle derivate del potenziale per $x \to \pm\infty$, $V'_{\pm\infty} = \mp K$ [perché è necessaria questa ipotesi? Che cosa succede quando $V'_{-\infty} \neq -V'_{+\infty}$?]. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(x)$ in tutto lo spazio, il campo elettrico $\vec{E}$, le densità superficiali di carica sulle due facce di ciascuno dei due conduttori, σ_1, σ'_1, σ_2 e σ'_2, e le cariche totali dei due conduttori per unità di superficie, $\tilde{Q}_1 = \sigma_1 + \sigma'_1$ e $\tilde{Q}_2 = \sigma_2 + \sigma'_2$. Si determini il valore di K affinché i due conduttori siano in mutua induzione completa.
ES. 6** Nel caso considerato nell'esercizio 5, si risolva il problema se sono assegnate le cariche totali dei due conduttori per unità di superficie, $\tilde{Q}_1$ e $\tilde{Q}_2$. Si determinino le densità superficiali di carica sulle due facce di ciascuno dei due conduttori, σ_1, σ'_1, σ_2 e σ'_2 e il campo elettrico $\vec{E}$ in tutto lo spazio. Fissando lo zero del potenziale in maniera tale che $V_1 = 0$, si determinino il potenziale elettrostatico $V(x)$ in tutto lo spazio, il potenziale V_2 del secondo strato piano.
ES. 7** Nel caso considerato nell'esercizio 5, si risolva il problema se sono assegnati la carica per unità di superficie $\tilde{Q}_1$ del primo conduttore e il potenziale V_2 del secondo conduttore. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(x)$ in tutto lo spazio, il potenziale V_1 del primo conduttore, la carica per unità di superficie $\tilde{Q}_2$ del secondo conduttore, il campo elettrico $\vec{E}$ da essi generato, e le densità superficiali di carica sulle due facce di ciascuno dei due conduttori, σ_1, σ'_1, σ_2 e σ'_2. [Si assuma sempre che $V'_{\pm\infty} = \mp K$].
ES. 8 Utilizzando il risultato dell'esercizio 3, si risolva il problema dell'elettrostatica per due conduttori cilindrici indefiniti coassiali. Il primo conduttore ha raggio R_1 e potenziale V_1. Il secondo conduttore è un cilindro cavo, ha raggio interno R_2, raggio esterno R'_2 (con $R_1 < R_2 < R'_2$) e potenziale V_2. Si assuma come asse z l'asse dei due cilindri, si adotti un sistema di coordinate cilindriche, e sia assegnato anche il valore della derivata radiale del potenziale per $r = R'_2$, $V'(r = R'_2) = K$ [perché è necessaria questa ipotesi?]. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto lo spazio (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ variabile radiale in coordinate cilindriche), il campo elettrico $\vec{E}$, le densità superficiali di carica dei due conduttori, σ_1, σ_2 e σ'_2 e le cariche totali per unità di altezza di ciascun cilindro, $\tilde{Q}_1 = 2\pi R_1\sigma_1$ e $\tilde{Q}_2 = 2\pi(R_2\sigma_2 + R'_2\sigma'_2)$. Si determini K affinché i due conduttori siano in mutua induzione completa.
ES. 9 Nel caso considerato nell'esercizio 8, si risolva il problema se sono assegnate le cariche totali per unità di altezza dei due conduttori, $\tilde{Q}_1$ e $\tilde{Q}_2$. Si determinino le densità superficiali di carica dei due conduttori, σ_1, σ_2 e σ'_2 e il campo elettrico $\vec{E}$ da essi generato. Fissando lo zero del potenziale in maniera tale che $V_1 = 0$, si determinino il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto lo spazio e il potenziale V_2 del secondo conduttori.
ES. 10 Nel caso considerato nell'esercizio 8, si risolva il problema se sono assegnati la carica per unità di altezza $\tilde{Q}_1$ del primo conduttore e il potenziale V_2 del secondo conduttore e la derivata radiale del potenziale per $r = R'_2$, $V'(r = R'_2) = K$. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto lo spazio, il potenziale V_1 del primo conduttore, la carica per unità di altezza $\tilde{Q}_2$ del secondo conduttore, il campo elettrico $\vec{E}$ da essi generato e le densità superficiali di carica dei due conduttori, σ_1, σ_2 e σ'_2.
ES. 11 Utilizzando il risultato dell'esercizio 4, si risolva il problema dell'elettrostatica per due conduttori sferici concentrici. Il primo conduttore ha raggio R_1 e potenziale V_1. Il secondo conduttore è cavo e ha la forma di un guscio sferico, ha raggio interno R_2, raggio esterno R'_2 (con $R_1 < R_2 < R'_2$) e potenziale V_2. Si adotti un sistema di coordinate sferiche. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto lo spazio (con $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ variabile radiale in coordinate sferiche), il campo elettrico $\vec{E}$, le densità superficiali di carica dei due conduttori, σ_1, σ_2 e σ'_2 e le loro cariche totali Q_1 e Q_2. Si determini la relazione che deve intercorrere tra V_1 e V_2 affinché i due conduttori siano in mutua induzione completa.
ES. 12 Nel caso considerato nell'esercizio 11, si risolva il problema se sono assegnate le cariche dei due conduttori, Q_1 e Q_2. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto lo spazio, i potenziali V_1 e V_2 dei due conduttori,

il campo elettrico $\vec{E}$ da essi generato e le densità superficiali di carica dei due conduttori, σ_1, σ_2 e σ_2'. Si verifichi la simmetria dei coefficienti di potenziale indotto.

ES. 13 Nel caso considerato nell'esercizio 11, si risolva il problema se sono assegnati la carica Q_1 del primo conduttore e il potenziale V_2 del secondo conduttore. Si determinino il potenziale elettrostatico $V(r)$ in tutto lo spazio, il potenziale V_1 del primo conduttore, la carica Q_2 del secondo conduttore, le densità superficiali di carica dei due conduttori, σ_1, σ_2 e σ_2' e il campo elettrico $\vec{E}$ da essi generato.

ES. 14** Si risolva il problema generale dell'elettrostatica per un sistema costituito da un conduttore neutro con una superficie piana infinitamente estesa, che occupa un semispazio infinito e una carica puntiforme q posta nell'altro semispazio, a distanza d dalla superficie del conduttore. Si determinino il potenziale elettrostatico V e il campo elettrico $\vec{E}$ in tutto lo spazio. Si determini la densità superficiale di carica σ indotta sulla superficie del conduttore e la carica totale indotta. [Suggerimento. Si consideri una carica *immagine* $q^* = -q$, posta simmetricamente rispetto a q, nel semispazio occupato dal conduttore. Si osservi che il potenziale generato da q e q^* soddisfa la condizione al contorno sulla superficie del conduttore. Questo metodo di soluzione dei problemi elettrostatici è detto *metodo delle cariche immagine*].

ES. 15 Si usino opportunamente i risultati dell'esercizio 5, per determinare la capacità di un condensatore piano. Si indichi con S la superficie di ciascuna faccia del condensatore e si assuma S abbastanza grande da poter usare i risultati ottenuti nel caso di conduttori infinitamente estesi.

ES. 16 Si usino opportunamente i risultati dell'esercizio 8, per determinare la capacità di un condensatore cilindrico di altezza $h \gg R_1, R_2$ (di modo che sia ragionevole utilizzare i risultati ottenuti per conduttori infinitamente estesi). Si determini l'espressione asintotica della capacità per $d \equiv R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$.

ES. 17 Si usino opportunamente i risultati dell'esercizio 11, per determinare la capacità di un condensatore sferico. Si determini l'espressione asintotica della capacità per $d \equiv R_2 - R_1 \ll R_1, R_2$.

ES. 18 Una sfera conduttrice di raggio R e carica Q è immersa in un dielettrico omogeneo di costante dielettrica relativa ε_r. Determinare il potenziale elettrostatico V, il campo elettrico $\vec{E}$, il vettore di spostamento dielettrico $\vec{D}$ e il vettore densità di polarizzazione $\vec{P}$ in tutto lo spazio. Determinare la carica di polarizzazione Q_{pol}.

ES. 19 Si risolva l'esercizio 6 nel caso in cui la regione di spazio tra i due conduttori sia riempita da un dielettrico omogeneo con costante dielettrica relativa ε_r. Si determini il valore delle densità superficiali di carica di polarizzazione $\sigma_{pol,1}$ e $\sigma_{pol,2}$ sulle superfici dei due conduttori. Si determini il vettore densità di polarizzazione $\vec{P}$ nella regione di spazio in cui è presente il dielettrico.

ES. 20 Si risolva l'esercizio 9 nel caso in cui la regione di spazio tra i due conduttori sia riempita da un dielettrico omogeneo con costante dielettrica relativa ε_r. Si determini il valore delle densità superficiali di carica di polarizzazione $\sigma_{pol,1}$ e $\sigma_{pol,2}$ sulle superfici affacciate dei due conduttori cilindrici. Si determini il vettore densità di polarizzazione $\vec{P}$ nella regione di spazio compresa tra i due conduttori.

ES. 21 Si risolva l'esercizio 12 nel caso in cui la regione di spazio tra i due conduttori sia riempita da un dielettrico omogeneo con costante dielettrica relativa ε_r. Si determini il valore delle densità superficiali di carica di polarizzazione $\sigma_{pol,1}$ e $\sigma_{pol,2}$ sulle superfici affacciate dei due conduttori sferici. Si determini il vettore densità di polarizzazione $\vec{P}$ nella regione di spazio in cui è presente il dielettrico.

ES. 22* Una carica puntiforme Q è posta in un dielettrico omogeneo con costante dielettrica relativa ε_{r1} a distanza d dalla superficie di separazione con un dielettrico omogeneo la cui costante dielettrica relativa è ε_{r2}. Tale superficie di separazione è un piano illimitato. Si determinino in tutto lo spazio il potenziale elettrostatico V, il campo elettrico $\vec{E}$, il vettore di spostamento dielettrico $\vec{D}$ e il vettore densità di polarizzazione $\vec{P}$.

ES. 23 Un condensatore piano le cui armature hanno superficie S e sono poste a distanza d è riempito da due strati di dielettrico, di spessore d_1 e d_2 (con $d_1 + d_2 = d$) e costanti dielettriche relative ε_{r1} e ε_{r2}. Le due armature sono poste a potenziale V_1 e V_2 (con $V_2 > V_1$). Si determinino il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico nella regione di spazio compresa tra le due armature. Si determini la carica su ciascuna delle due armature. Si calcoli quindi la capacità del condensatore. Quanto vale la densità superficiale di cariche di polarizzazione σ_{pol}?

ES. 25 Generalizzare i risultati dell'esercizio precedente al caso in cui tra le armature del condensatore sono presenti N strati di dielettrico (*multistrato*), di spessori $d_1, ..., d_N$ (con $\sum_{i=1}^{N} d_i = d$) e costanti dielettriche relative $\varepsilon_{r1}, ..., \varepsilon_{rN}$. Quale valore si potrebbe assegnare alla costante dielettrica relativa effettiva del multistrato?

ES. 26** Si consideri un condensatore piano le cui armature sono lastre metalliche quadrate di lato ℓ, poste a distanza d. Lo spazio tra le due armature è riempito da due strati di dielettrico sovrapposti, di spessore d, altezza $\frac{1}{2}\ell$ e costanti dielettriche relative ε_{r1} e ε_{r2}. Le due armature sono poste a potenziale V_1 e V_2 (con $V_2 > V_1$). Si determinino il campo elettrico ed il potenziale elettrostatico nella regione di spazio compresa tra le due armature. Si determini la carica su ciascuna delle due armature. Si calcoli quindi la capacità del condensatore. Si determini il vettore spostamento dielettrico $\vec{D}$ nella regione di spazio compresa tra le due armature. Quanto vale la densità superficiale di cariche di polarizzazione σ_{pol}?