Prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 7 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

In un piano orizzontale, sul quale è fissato un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, si muove una guida circolare, rigida e omogenea, di centro G, massa M e raggio R. Lungo un diametro della guida è saldata una barra AB, rigida e omogenea, di massa m e lunghezza $L = 2R$. Il punto C della barra, che dista $d = \frac{R}{2}$ dall'estremo A, è vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida coincidente con l'asse Ox. Il sistema è libero di ruotare rigidamente attorno ad un asse perpendicolare al piano Oxy, passante per C, ed è soggetto alle due forze attive $\underline{F}_{\mathrm{a}} = -K\,\mathrm{H_a A}$ e $\underline{F}_{\mathrm{b}} = -K\,\mathrm{H_b B}$, con $K > 0$, dove $\mathrm{H_a}$ è la proiezione ortogonale di A sulla retta $x = -\gamma$ e $\mathrm{H_b}$ è la proiezione ortogonale di B sulla retta $x = \gamma$, con $\gamma > 0$.
Si adottino come coordinate lagrangiane l'ascissa x di C e l'angolo θ che la barra AB forma con il verso positivo dell'asse Ox (si veda la Fig. 1).

1. Si scrivano la funzione di Lagrange $\mathcal{L}$ del sistema e le equazioni del moto.

2. Si trovino le posizioni di equilibrio del sistema e se ne discuta il numero e la stabilità al variare del parametro $\frac{\gamma}{R} \in (0, +\infty)$.

3. Ponendo ora $\gamma = \frac{2}{3}$, $R = 1$, $M = 3$, $m = 1$, $K = 1$, si scelga una posizione di equilibrio stabile e si determinino le frequenze delle piccole oscillazioni attorno ad essa.

N.B.: Il momento d'inerzia del sistema rispetto al suo centro di massa G è $I_{\mathrm{G}} = \left(M + \frac{m}{3}\right) R^2$.

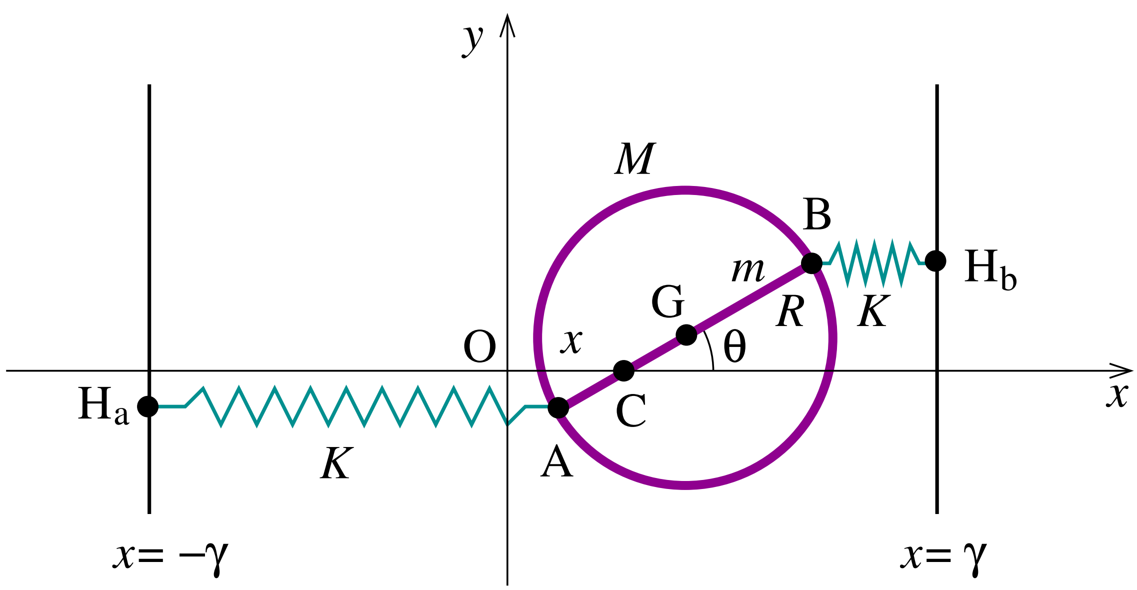

Fig. 1

Soluzione della prova in itinere di Meccanica Analitica e Relativistica del 11 novembre 2018
Proff. S. Caprara, L. Gualtieri, M. Papinutto

1. Si ha $x_\mathrm{G} = x + \frac{R}{2}\cos\theta$, $y_\mathrm{G} = \frac{R}{2}\sin\theta$, $x_\mathrm{A} = x - \frac{R}{2}\cos\theta$, $x_\mathrm{B} = x + \frac{3R}{2}\cos\theta$. Quindi l'energia cinetica è

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\left(\dot{x}_\mathrm{G}^2 + \dot{y}_\mathrm{G}^2\right) + \frac{1}{2}I_\mathrm{G}\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[(M+m)\,\dot{x}^2 + \left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m\right)R^2\,\dot{\theta}^2 - (M+m)R\sin\theta\,\dot{x}\,\dot{\theta}\right].$$

L'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}K\left[(x_\mathrm{A} - x_{\mathrm{H_a}})^2 + (x_\mathrm{B} - x_{\mathrm{H_b}})^2\right] = \frac{1}{2}K\left(x - \frac{R}{2}\cos\theta + \gamma\right)^2 + \frac{1}{2}K\left(x + \frac{3R}{2}\cos\theta - \gamma\right)^2.$$

La funzione di Lagrange è $\mathcal{L} = T - U$ e le equazioni del moto sono

$$(M+m)\left(\ddot{x} - \frac{R}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta} - \frac{R}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}^2\right) = -K\,(2x + R\cos\theta)\,,$$

$$\left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m\right)R^2\,\ddot{\theta} - \frac{M+m}{2}R\sin\theta\,\ddot{x} = \frac{KR}{2}\sin\theta\,(2x + 5R\cos\theta - 4\gamma)\,.$$

2. Le derivate dell'energia potenziale sono

$$\partial_x U = K\,(2x + R\cos\theta)\,, \qquad \partial_\theta U = \frac{KR}{2}\sin\theta\,(4\gamma - 2x - 5R\cos\theta)\,.$$

Annullando le derivate dell'energia potenziale si determinano le posizioni di equilibrio. Si ha

$$x = -\frac{R}{2}\cos\theta, \qquad (2x + 5R\cos\theta - 4\gamma)\sin\theta = 0$$

La prima posizione di equilibrio è $\sin\theta_1 = 0$, $\theta_1 = 0$ e $x_1 = -\frac{R}{2}$.
La seconda posizione di equilibrio è $\sin\theta_2 = 0$, $\theta_2 = \pi$ e $x_2 = \frac{R}{2}$.
Si hanno poi due posizioni equivalenti con $\sin\theta \neq 0$, $\cos\theta_{3,4} = \frac{\gamma}{R}$, $\sin\theta_3 > 0$ e $\sin\theta_4 < 0$, e $x_{3,4} = -\frac{\gamma}{2}$. Poiché la traccia assegna $\gamma > 0$, queste due posizioni esistono solo se

$$0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1.$$

Le derivate seconde dell'energia potenziale sono

$$\partial^2_{xx}U = 2K, \quad \partial^2_{\theta\theta}U = \frac{KR}{2}\left[(4\gamma - 2x - 5R\cos\theta)\cos\theta + 5R\sin^2\theta\right], \quad \partial^2_{x\theta}U = \partial^2_{\theta x}U = -KR\sin\theta.$$

L'hessiano nella prima posizione vale $4K^2R(\gamma - R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ la condizione necessaria e sufficiente di equilibrio stabile è che l'hessiano sia positivo. Si ha quindi che la posizione di equilibrio (x_1, θ_1) è stabile per $\frac{\gamma}{R} > 1$.
L'hessiano nella seconda posizione vale $-4K^2R(\gamma + R)$ e poiché $\partial_{xx}U > 0$ si ha che la posizione di equilibrio (x_2, θ_2) non è stabile per nessun valore di $\frac{\gamma}{R} > 0$.
Nelle posizioni $3, 4$ l'hessiano $4K^2R^2\sin^2\theta$ è sempre positivo, quindi queste posizioni di equilibrio sono stabili quando esistono, cioè per $0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1$.
Riassumendo, per $0 < \frac{\gamma}{R} \leq 1$ si hanno quattro posizioni di equilibrio, la prima e la seconda instabili, la terza e la quarta (equivalenti) stabili; per $\frac{\gamma}{R} > 1$ si hanno due posizioni di equilibrio, la prima stabile, la seconda instabile.
3. Per i valori assegnati dalla traccia le posizioni stabili sono la 3 e la 4. La matrice dell'energia cinetica è

$$T_{\dot{x}\dot{x}} = M + m = 4, \qquad T_{\dot{\theta}\dot{\theta}} = \left(\frac{5}{4}M + \frac{7}{12}m\right)R^2 = \frac{13}{3}, \qquad T_{\dot{x}\dot{\theta}} = T_{\dot{\theta}\dot{x}} = -\frac{R}{2}(M+m)\sin\theta = -2\sin\theta.$$

La matrice dell'energia potenziale nelle posizioni di equilibrio stabile è

$$U_{xx} = 2K = 2, \qquad U_{\theta\theta} = \frac{5}{2}KR^2 \sin^2\theta = \frac{5}{2}\sin^2\theta, \qquad U_{x\theta} = U_{\theta x} = -KR\sin\theta = -\sin\theta.$$

L'equazione secolare $\det|U_{ij} - \omega^2 T_{ij}| = 0$ dà

$$\left(2 - 4\,\omega^2\right)\left(\frac{5}{2}\sin^2\theta - \frac{13}{3}\omega^2\right) - \left(1 - 2\,\omega^2\right)^2 \sin^2\theta = 0,$$

dove $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \frac{\gamma^2}{R^2} = \frac{5}{9}$ nelle posizioni di equilibrio 3,4. Sostituendo tale valore, si trova l'equazione biquadratica

$$34\,\omega^4 - 27\,\omega^2 + 5 = 0,$$

che ammette evidentemente due soluzioni positive,

$$\omega_\pm^2 = \frac{27 \pm 7}{68} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_+^2 = \frac{1}{2}, \quad \omega_-^2 = \frac{5}{17}.$$

Quindi, le frequenze dei due modi normali sono $\omega_+ = \sqrt{\frac{1}{2}} \approx 0.707$ e $\omega_- = \sqrt{\frac{5}{17}} \approx 0.542$.